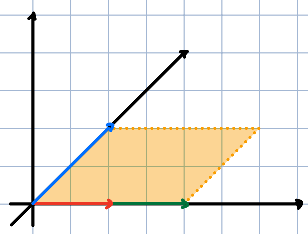
Übung 11 (01.12.23)

Recap

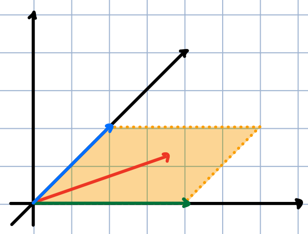
Welche Bedingungen müssen in 3-D gelten damit $\det(A)=0$?

Fall 1.)



↗ und ↗ sind Parallel

Fall 2.)



↗ Liegt in der von ↗ und ↗ aufgespannten Ebene.

Vektoren müssen linear abhänig sein damit $\det(A)=0$.

Vektoren sind linear abhänig wenn sie durch Linearkombinationen gebildet werden können.

$$\alpha \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$ (Linearkombination)

Immer wenn Spalten von A linear unabhänig sind (zeigen alle in unterschiedliche Richtungen 2D) ist $\det(A) \neq 0$. D.h. wenn A vollen Rang hat, dann sind alle Zeilen/Spalten linear unabhänig.

Formell:

$$\boxed{\sum x_i \cdot v_i = 0}$$

Die Vektoren v_i sind linear unabhängig, falls die Summe $\sum$ nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_i = 0$ hat.

Prüfen, ob Vektoren linear unabhängig:

1. Matrix mit Vektoren als Spalten erstellen:
   $V = (v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(n)})$
2. Der Rang ist die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren.
   $rang(V) = n \Longrightarrow$ Vektoren sind linear unabhängig.

Unsere Liste von Zusammenhängen wachst also weiter:

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- A ist invertierbar / regulär
- $\det(A) \neq 0$
- Zeilen / Spalten sind linear unabhängig

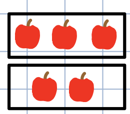
Vektorräume

Wenn wir Zählen lernen entwickeln wir ein abstraktes Gefühl für Zahlen.

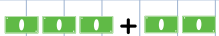
 ⟶ „3"

egal welches Objekt wir können einer gewissen Anzahl Objekten eine Zahl zuweisen.
Die Zahl 3 ist demnach nicht nur an Äpfel gebunden, sondern kann auch auf Dreiecke, Kreuze, etc. angewendet werden.

Wir wissen auch was passiert wenn wir zuerst 3 Äpfel und dann 2 Äpfel haben.

 ⟶ „5"

Dieses Gefühl für addition gilt nicht exklusiv für Äpfel, sondern lässt sich auch auf andere Objekte übertragen.

 ⟶ „5"    ⟶ „5"

Wir können Geld genau so gut wie Äpfel, Birnen und Rechtecke addieren. Wir haben also den Begriff der Addition abstrahiert (auf allgemeine Fälle erweitert).
Analog auch die Multiplikation.

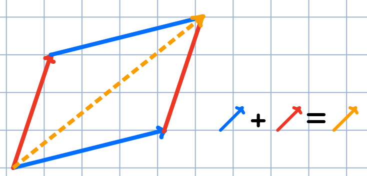
Dasselbe machen wir nun mit Vektoren.

Bis jetzt haben wir sie nur als Pfeile im Raum bzw. Ebene kennengelernt. Wir wissen schon wie man mit ihnen rechnet. Nun können Vektoren, genau wie Zahlen, nicht nur Pfeile darstellen, sondern beliebige Objekte z.B.

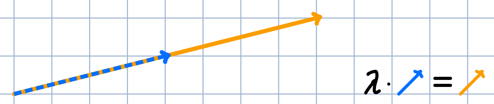
- → Kräfte
- → Position
- → Liste von Zahlen
- → Funktionen usw.

Wir wissen bereits wie wir mit Pfeilen im Raum rechnen können:

addieren



multiplizieren



Nun wollen wir auch diese Operationen auf alle Anwendungen von Vektoren abstrahieren.
Ausschlaggebend sind dafür die Regeln der Operation <u>nicht</u> die Objekte.

→ Rechenregeln werden zu Axiomen

Um diesen Schritt zu machen führen wir folgende Begriffe ein:

Vektor ⟶ **Objekt**

z.B. Fruchtkorb

Raum ⟶ **Menge**

Menge von verschieden gefüllten Fruchtkörben

Innere Operation $\oplus$ ⟶ **Kombination von Objekten aus einer Menge**

Ich lege alle Früchte aus verschiedenen Fruchtkörben zusammen.

Äussere Operation $\odot$ ⟶ **Kombination von Objekten aus Menge mit Skalar**

Verfielfachung aller Früchte in einem Korb.

4. Vektorräume

4.1 Definition Vektorraum

Sei V eine Menge von Objekten. V heisst Vektorraum, wenn eine **innere Operation** (Kombination von zwei Objekten) und eine **äussere Operation** (Kombination eines Objekts mit einem Skalar) definiert sind, und folgende Axiome gelten:

Innere Operation:

$\bigoplus$: $V \times V \to V$

$(a, b) \mapsto a \bigoplus b$

Äussere Operation:

$\bigodot$: $\mathbb{K} \times V \to V$

$(\alpha, a) \mapsto \alpha \bigodot a$

Es müssen nun sowohl eine innere Operation, als auch eine äussere Operation definiert werden.

$\bigoplus$: $V \times V \to V$ (⊕ nimmt zwei Vektoren aus der Menge V und ordnet dem Paar einen anderen Vektor in V zu.)

$(a,b) \mapsto a \bigoplus b$ (so wird die innere Operation ausgeführt)

$\bigodot$: $\mathbb{R} \times V \to V$ (⊙ nimmt einen Vektor und einen Skalar und produziert einen neuen Vektor in V)

$(\alpha, a) \mapsto \alpha \bigodot a$ (so wird die äussere Operation ausgeführt)

Nun müssen, basierend auf den inneren und äusseren Operationen, folgende Axiome gelten.

A1 $\forall u, v \in V$: $u + v = v + u$

A2 $\forall u, v, w \in V$: $(u + v) + w = u + (v + w)$

A3 $\exists 0 \in V$ so, dass $\forall u \in V$: $u + 0 = u$

A4 $\forall u \in V \ \exists -u \in V$ so, dass $u + (-u) = 0$

M1 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u \in V$: $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

M2 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ und $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

M3 $\forall u \in V$: $1u = u$

Der Vektor $0 \in V$ heisst **Nullvektor**.
Ein **komplexer VR** ist entsprechend, mit $\mathbb{C}$ an Stelle von $\mathbb{R}$, definiert.

Axiome:

(A1) $\forall u, v \in V$:	$u \bigoplus v = v \bigoplus u$
(A2) $\forall u, v, w \in V$:	$(u \bigoplus v) \bigoplus w = u \bigoplus (v \bigoplus w)$
(A3) $\exists 0 \in V$, $\forall u \in V$:	$u \bigoplus 0 = u$
(A4) $\forall u \in V$, $\exists -u \in V$:	$u \bigoplus (-u) = 0$
(M1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u \in V$:	$(\alpha \cdot \beta) \bigodot u = \alpha \bigodot (\beta \bigodot u)$
(M2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$:	$(\alpha + \beta) \bigodot u = (\alpha \bigodot u) \bigoplus (\beta \bigodot u)$ $\alpha \bigodot (u \bigoplus v) = (\alpha \bigodot u) \bigoplus (\alpha \bigodot v)$
(M3) $\forall u \in V$:	$1 \bigodot u = u$

Definition der Symbole:

$\forall$: für alle

$\exists$: es existiert

Gehen wir alle Axiome schrittweise durch:

Axiome:

(A1) $\forall u, v \in V:$ $\quad u \oplus v = v \oplus u$ → Vektorielles Kommutativgesetz

(A2) $\forall u, v, w \in V:$ $\quad (u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ → Vektorelles Assoziativgesetz

(A3) $\exists 0 \in V,$ $\forall u \in V:$ $\quad u \oplus 0 = u$ → Neutrales Element (Nullvektor)

(A4) $\forall u \in V,$ $\exists -u \in V:$ $\quad u \oplus (-u) = 0$ → Inverses Element

(M1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$ $\forall u \in V:$ $\quad (\alpha \cdot \beta) \odot u = \alpha \odot (\beta \odot u)$ → Skalares Assoziativgesetz

(M2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$ $\forall u, v \in V:$ $\quad (\alpha + \beta) \odot u = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u)$
$\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$ → Distributivgesetz

(M3) $\forall u \in V:$ $\quad 1 \odot u = u$ → Neutrales Element

Nun kennen wir alle Regeln und können überprüfen ob beispielsweise die bekannten 2-D Vektorpfeile einen Vektorraum beschreiben. Dafür müssen wir alle Axiome prüfen.

Die Operationen sind bekanntlich wie folgt definiert.

Innere Operation: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

Äussere Operation: $\alpha \odot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \end{pmatrix}$

(A1) $\forall u, v \in V:$ $\quad u \oplus v = v \oplus u$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \end{pmatrix} \quad ✓$$

(A2) $\forall u, v, w \in V:\quad (u \bigoplus v) \bigoplus w = u \bigoplus (v \bigoplus w)$

$$\rightarrow \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right] \oplus \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \oplus \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} (a_1+b_1)+c_1 \\ (a_2+b_2)+c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + (b_1+c_1) \\ a_2 + (b_2+c_2) \end{pmatrix} \checkmark$$

(A3) $\exists 0 \in V, \quad u \bigoplus 0 = u$

$\forall u \in V:$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + 0 \\ a_2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \checkmark$$

(A4) $\forall u \in V, \quad u \bigoplus (-u) = 0$

$\exists -u \in V:$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} 0$$

$$\begin{pmatrix} a_1 - a_1 \\ a_2 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

(M1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (\alpha \cdot \beta) \odot u = \alpha \odot (\beta \odot u)$

$\forall u \in V:$

$$\rightarrow (\alpha \cdot \beta) \odot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \alpha \odot \left(\beta \odot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha \cdot \beta) \cdot a_1 \\ (\alpha \cdot \beta) \cdot a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot (\beta \cdot a_1) \\ \alpha \cdot (\beta \cdot a_2) \end{pmatrix} \checkmark$$

(M2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (\alpha + \beta) \odot u = (\alpha \odot u) \bigoplus (\beta \odot u)$

$\forall u, v \in V: \quad \alpha \odot (u \bigoplus v) = (\alpha \odot u) \bigoplus (\alpha \odot v)$

$$\rightarrow (\alpha + \beta) \odot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \alpha \odot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \oplus \beta \odot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha+\beta)\cdot a_1 \\ (\alpha+\beta)\cdot a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\cdot a_1 + \beta\cdot a_1 \\ \alpha\cdot a_2 + \beta\cdot a_2 \end{pmatrix}$$

(M3) $\forall u \in V: \qquad 1 \odot u = u$

$$\rightarrow \quad 1 \odot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot a_1 \\ 1\cdot a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Die bereits bekannten 2-D Vektorpfeile beschreiben also einen Vektorraum.

ACHTUNG!

→ Operationen sind wichtig!

Wir könnten die Operation anders definieren z.B.

Innere Operation: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_2 \\ a_2 + b_1 \end{pmatrix}$

Äussere Operation: $\alpha \odot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\cdot a_1 \\ \alpha\cdot a_2 \end{pmatrix}$

(A1) $\forall u, v \in V: \qquad u \oplus v = v \oplus u$

$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_2 \\ a_2 + b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_2 \\ b_2 + a_1 \end{pmatrix}$$

Kein Vektorraum!

Nun können wir auch überprüfen ob andere Vektoren (Objekte) einen VR beschreiben.

Betrachten wir dafür die Menge aller Linearen Funktionen $a(x) = a_1 x + a_2$, mit folgenden Operationen:

Innere Operation: $(a_1 x + a_2) \oplus (b_1 x + b_2) = (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2)$

Äussere Operation: $\alpha \odot (a_1 x + a_2) = \alpha a_1 x + a_2$

(A1) $\forall u, v \in V:$ $u \oplus v = v \oplus u$

$\rightarrow$ $a(x) \oplus b(x) = b(x) \oplus a(x)$

$(a_1+b_1)x + (a_2+b_2) = (b_1+a_1)x + (b_2+a_2)$ ✓

(A2) $\forall u, v, w \in V:$ $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$

$\rightarrow$ $[a(x) \oplus b(x)] \oplus c(x) = a(x) \oplus [b(x) \oplus c(x)]$

$((a_1+b_1)+c_1)x + (a_2+b_2)+c_2 = (a_1+(b_1+c_1))x + a_2+(b_2+c_2)$ ✓

(A3) $\exists 0 \in V,$ $u \oplus 0 = u$
$\forall u \in V:$

$\rightarrow$ $a(x) \oplus f_0(x) = a(x)$

$(a_1x+a_2) + (0x+0) = (a_1x+a_2)$ ✓

(A4) $\forall u \in V,$ $u \oplus (-u) = 0$
$\exists -u \in V:$

$\rightarrow$ $a(x) \oplus (-a(x)) = 0$

$(a_1x+a_2) + (-a_1x-a_2) = 0$ ✓

(M1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$ $(\alpha \cdot \beta) \odot u = \alpha \odot (\beta \odot u)$
$\forall u \in V:$

$\rightarrow$ $(\alpha \cdot \beta) \odot a(x) = \alpha \odot (\beta \odot a(x))$

$\alpha \cdot \beta (a_1x+a_2) = \alpha(\beta a_1x + \beta a_2)$ ✓

(M2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V:$

$$(\alpha + \beta) \odot u = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u)$$
$$\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$$

$\rightarrow \ (\alpha + \beta) \odot a(x) = (\alpha \odot a(x)) \oplus (\beta \odot u(x))$

$(\alpha + \beta)(a_1 x + a_2) = \alpha(a_1 x + a_2) + \beta(a_1 x + a_2)$ ✓

(M3) $\forall u \in V: \quad 1 \odot u = u$

$\rightarrow \ 1 \odot a(x) = a(x)$

$1 \cdot (a_1 x + a_2) = (a_1 x + a_2)$ ✓

Es handelt sich um einen Vektorraum

Zusamenfassend:

Wir wollen unsere Vorstellung von Vektoraddition und Multiplikation, von den uns bekannten Vektorpfeilen im Raum und Ebene, auf alle möglichen Vektoren abstrahieren (verallgemeinern). Damit können wir dann später die Eigenschaften von Vektoren auch auf z.B. Funktionen (welche sich als Vektoren darstellen lassen) anwenden.

Unterräume

Ein Unterraum ist eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraums welche folgende Eigenschaften erfüllt.

(i) $\forall\ a, b \in U: \quad a + b \in U$ → Summe von zwei Elementen von U ist weiterhin Teil von U

(ii) $\forall\ a \in U, \alpha \in \mathbb{R}: \quad \alpha \cdot a \in U$ → Wird ein Element von U mit einem Skalar multipliziert, so ist das skalierte Element weiterhin Teil von U.

Ein Unterraum ist selber auch ein Vektorraum.

Bsp. I:

Sei V: alle linearen Funktionen der Form: $a(x)=a_1 x + a_2$

und U: alle linearen Funktionen mit Steigung 2: $f(x)=2x+b$

Ist U ein Unterraum von V?

(i) $\forall\, a,b \in U: \quad a+b \in U$

$\rightarrow (2x+b_1)+(2x+b_2) = 4x+b_1+b_2 \longrightarrow$ nicht Teil von U

U ist <u>kein</u> Unterraum von V

Bsp. II:

Sei V: alle linearen Funktionen der Form: $a(x)=a_1 x + a_2$

und U: alle konstanen linearen Funktionen : $f(x)=b$

Ist U ein Unterraum von V?

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(i) } \forall\, a,b \in U: \quad a+b \in U & \longrightarrow & f_1(x)+f_2(x) = b_1+b_2 \\ \text{(ii) } \forall\, a \in U, \alpha \in \mathbb{R}: \quad \alpha \cdot a \in U & \longrightarrow & \alpha f_1(x) = \alpha \cdot b_1 \end{array}\right\} \text{Teil von } U$$

U ist ein Unterraum von V

Beispielaufgabe

BP W 2020

4.) (Angepasst)

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, welche Menge ist <u>kein</u> UR von $\mathbb{R}^2$

↳ (alle Vektoren der Form $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$)

a.) $\{ x \in \mathbb{R}^2 : Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

b.) $\{ x \in \mathbb{R}^2 : Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

→ a.) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

→ b.) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a.) (i) $\forall\, a,b \in U: \quad a+b \in U \quad \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ii) $\forall\, a \in U, \alpha \in \mathbb{R}: \quad \alpha \cdot a \in U \quad \longrightarrow \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

→ Beide Teil der Menge
Unterraum

b.) (i) $\forall\, a,b \in U: \quad a+b \in U \quad \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

(ii) $\forall\, a \in U, \alpha \in \mathbb{R}: \quad \alpha \cdot a \in U \quad \longrightarrow \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

→ Beide nicht Teil von Menge
kein Unterraum.

<u>b.)</u>

Tipps zur Serie

1.) Wichtig!

- A gut anschauen. Zeilen vergleichen
- Zusammenhänge!

2.) Wichtig!

a. Was ist $\det(A^T)$?

b. Zusammenhänge!

3.) Weniger relevant für Prüfung (https://www.3blue1brown.com/lessons/cramers-rule)

↳ Sehr gute graphische Erklärung

4.) Weniger relevant für Prüfung