Übung 12 (08.12.23)

Lernkontrolle: Für den letzten Bonuspunkt in diesem Semester wird am 15. Dezember eine unbenotete Lernkontrolle über den Stoff des ersten Semesters durchgeführt. Die Lernkontrolle ist nicht als Probetest für die Basisprüfung zu verstehen und ist ohne Hilfsmittel zu lösen, das heisst auch ohne Zusammenfassung. Die Lernkontrolle dauert 60 Minuten und wird vor Ort während den Übungsstunden durchgeführt. Um Ihnen 60 Minuten zur Verfügung zu stellen, beginnt die Übungsstunde am 15. Dezember 5 Minuten früher, bitte seien Sie pünktlich! Zur Bearbeitung der Lernkontrolle benötigen Sie einen Device mit Internetzugang (Laptop/Tablet), den Sie selbst zur Übungsstunde mitbringen müssen. Den Link für den Zugriff auf die Lernkontrolle erhalten Sie am 14. Dezember per E-Mail. Falls Sie nicht vor Ort an der Lernkontrolle teilnehmen können, dürfen Sie auch von zuhause aus teilnehmen. Für eine sinnvolle Bearbeitung der Lernkontrolle erhalten Sie 1 Punkt, ansonsten 0 Punkte.

Nächste Woche ist Lernkontrolle. Geht in den Übungsraum in dem Ihr eingeschrieben seid, damit alle Platz haben.

Recap

Vektorräume:

4. Vektorräume

4.1 Definition Vektorraum

Sei V eine Menge von Objekten. V heisst Vektorraum, wenn eine **innere Operation** (Kombination von zwei Objekten) und eine **äussere Operation** (Kombination eines Objekts mit einem Skalar) definiert sind, und folgende Axiome gelten:

Innere Operation:
$\bigoplus$: $V \times V \to V$
$(a, b) \mapsto a \bigoplus b$

Äussere Operation:
$\bigodot$: $\mathbb{K} \times V \to V$
$(\alpha, a) \mapsto \alpha \bigodot a$

Es müssen nun sowohl eine innere Operation, als auch eine äussere Operation definiert werden.

$\oplus: V \times V \to V$ ($\oplus$ nimmt zwei Vektoren aus der Menge V und ordnet dem Paar einen anderen Vektor in V zu.)

$(a,b) \mapsto a \oplus b$ (so wird die innere Operation ausgeführt)

$\odot: \mathbb{R} \times V \to V$ ($\odot$ nimmt einen Vektor und einen Skalar und produziert einen neuen Vektor in V)

$(\alpha, a) \mapsto \alpha \odot a$ (so wird die äussere Operation ausgeführt)

Nun müssen, basierend auf den inneren und äusseren Operationen, folgende Axiome gelten.

Axiome:

(A1) $\forall u, v \in V$: $u \bigoplus v = v \bigoplus u$

(A2) $\forall u, v, w \in V$: $(u \bigoplus v) \bigoplus w = u \bigoplus (v \bigoplus w)$

(A3) $\exists 0 \in V$, $\forall u \in V$: $u \bigoplus 0 = u$

(A4) $\forall u \in V$, $\exists -u \in V$: $u \bigoplus (-u) = 0$

(M1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u \in V$: $(\alpha \cdot \beta) \bigodot u = \alpha \bigodot (\beta \bigodot u)$

(M2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$: $(\alpha + \beta) \bigodot u = (\alpha \bigodot u) \bigoplus (\beta \bigodot u)$
$\alpha \bigodot (u \bigoplus v) = (\alpha \bigodot u) \bigoplus (\alpha \bigodot v)$

(M3) $\forall u \in V$: $1 \bigodot u = u$

Nun kennen wir alle Regeln und können überprüfen ob eine Menge einen Vektorraum beschreibt. Dafür müssen wir alle Axiome prüfen. (Siehe Beispiel letzte Übung).

ACHTUNG!

→ Operationen sind wichtig! nicht Objekte

Bsp:

Betrachten wir die Menge aller Linearen Funktionen $a(x) = a_1 x + a_2$, mit folgenden Operationen:

Innere Operation: $(a_1 x + a_2) \oplus (b_1 x + b_2) = (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2)$

Äussere Operation: $\alpha \odot (a_1 x + a_2) = \alpha a_1 x + a_2$

Unterräume:

Ein Unterraum ist eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraums welche folgende Eigenschaften erfüllt.

(i) $\forall\, a, b \in U$: $a + b \in U$ → Summe von zwei Elementen von U ist weiterhin Teil von U

(ii) $\forall\, a \in U, \alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha \cdot a \in U$ → Wird ein Element von U mit einem Skalar multipliziert, so ist das skalierte Element weiterhin Teil von U.

Ein Unterraum ist selber auch ein Vektorraum.

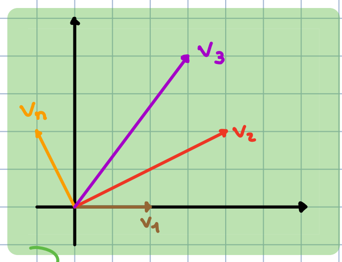
Linearkombination contd.

Sei $v := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, dann ist v eine Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $v_1, \dots, v_n \in V$ (V ist ein VR)

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

die Menge aller Linearkombinationen nennt sich Lineare Hülle und wird mit $\text{span}(v_1, \dots, v_n)$ abgekürzt.

Diese Menge aller Linearkombinationen ist ein Vektorraum V. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind dann ein Erzeugendensystem von V.



Vektorraum $V = \text{span}(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$

Es lassen sich nun alle Vektoren in V durch eine Linearkombination der Erzeugendenvektoren bilden.

Betrachten wir Beispielsweise 2D Vektorpfeile ($V = \mathbb{R}^2$) wie in BA-5. Es lassen sich beliebig viele Erzeugendensysteme finden:

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$\vdots$

etc.

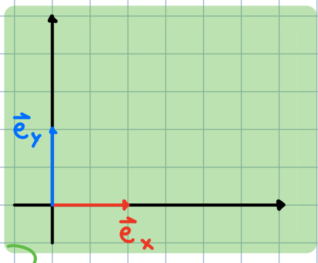
Am vorteilhaftesten ist es möglichst kleine Erzeugendensysteme zu finden, da alle Erzeugendensysteme die selben Information enthalten.

Dies ist immer der Fall wenn, alle Vektoren $v_1, \dots, v_n$ eines Erzeugendensystems linear unabhänig sind. Dies Menge linear unabhäniger Vektoren heisst Basis. Die Vektoren heissen Basisvektoren.

In 2-D wird oft die „Standartbasis" $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ verwendet.

Wobei: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Jeder Vektor kann eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden.

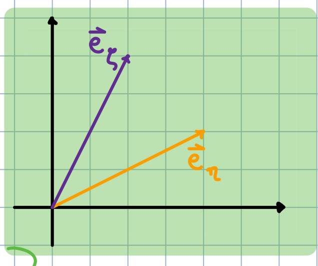


Vektorraum $V = \text{span}(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$

Wir können jedoch auch andere linear unabhänige Vektoren als Basisvektoren verwenden.

Seien z.B. $\vec{e}_\eta = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{e}_\zeta = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Jeder Vektor kann eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden.



Vektorraum $V = \text{span}(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$

Die Anzahl von Basisvektoren bleibt jedoch erhalten. Diese Anzahl nennt man Dimension.

In unserem Fall mit $V = \text{span}(\vec{e}_x, \vec{e}_y) = \text{span}(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$, hat der VR V die Dimension 2.

Aus vergangenen Wochen sollte uns diese eindeutige Kombination von Vektoren bekannt vorkommen.

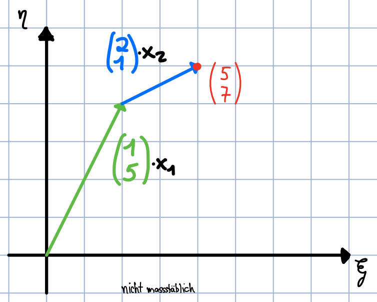
Wo genau?

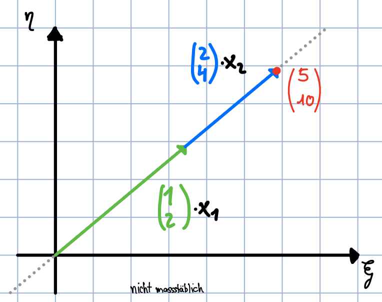
Bei der Betrachtung der Spalten der Koeffizientenmatrix A eines LGS $Ax=b$.

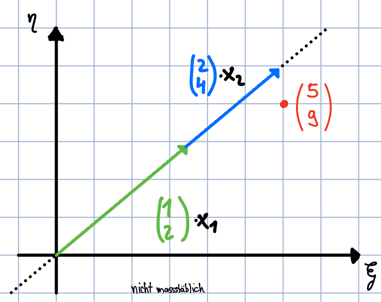
Betrachten wir die Spalten von A. Dann kann das LGS $Ax=b$ als Linearkombination der Spalten gesehen werden.

$$Ax = \underbrace{x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \dots x_n a^{(n)}}_{\text{Linearkombination}} \qquad a^{(j)} = j\text{-te Spalte von } A$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$







$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 9 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$

Der Rang ist gleich der Dimension des Lösungsraums. D.h. wenn der Rang voll ist können wir jeden beliebigen Punkt im Lösungsraum erreichen.

Aus Woche 03 bzw. 10

in anderen Worten: alle Punkte / Vektoren lassen sich als Linearkombination der Spalten von A beschreiben.

d.h. die Spalten von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$ wenn der Rang voll ist.

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- A ist invertierbar / regulär
- $\det(A) \neq 0$
- Zeilen / Spalten sind linear unabhängig
- Spalten von A sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$

Warum brauchen wir immernoch die Repräsentation der Vektoren als Pfeile obwohl wir bei den Vektorräumen allgemeine Objekte beschreiben wollen?

Betrachten wir hierfür nochmals den VR der Funktionen der Form $f(x) = ax + b$.

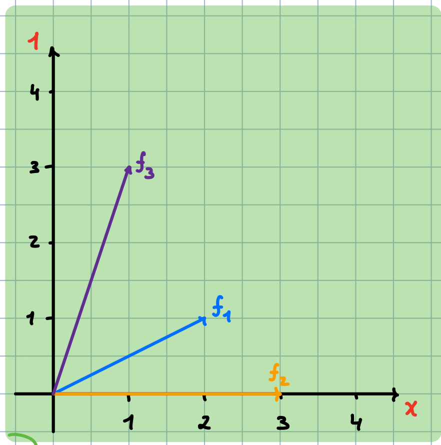
Wir können jede Funktion in einem „abstrakten Raum" darstellen.

Wir wählen dafür die Basisvektoren $\{x, 1\}$

$f_1(x) = 2x + 1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f_2(x) = 3x + 0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f_3(x) = 1x + 3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$



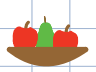
Vektorraum $V = \text{span}(x, 1)$

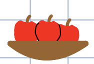
Wir erkenn auch, dass der Vektorraum V der Funktionen der Form $f(x) = ax + b$ die Dimension 2 hat, $\dim(V) = 2$.

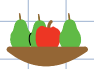
Wir können auch nochmals an die Fruchtkörbe denken. Sei unser Vektorraum V^* also nun die Menge aller Fruchtkörbe mit Äpfel und Birnen.

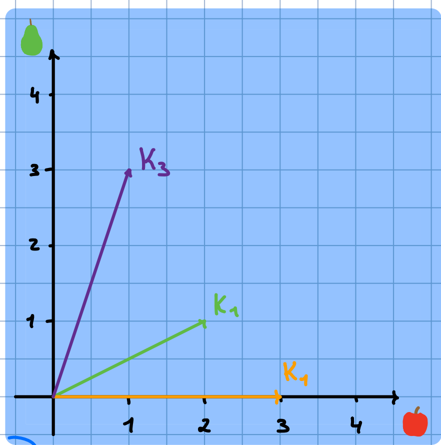
Wir können jeden Fruchtkorb in einem „abstrakten Raum" darstellen.

Wir wählen dafür die „Basisvektoren" {Apfel, Birne}

K_1:  $= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

K_2:  $= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

K_3:  $= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$



Vektorraum $V^* = \text{span}(\text{Apfel}, \text{Birne})$

$\dim(V^*) = 2$

Alle endliche Vektorräume können als Pfeil dargestellt werden.

Beispielaufgabe

1.) Seien

$$p_1(x) = x^3 + x^2$$

$$p_2(x) = x^2 - 2x - 4$$

$$p_3(x) = 3x + 4$$

$$p_4(x) = 2x + 3$$

a.) Schreibe das Polynom $2x^3 + 3x^2 - 1$ als Linearkombination von p_1, p_2, p_3, p_4

d.h.: $\alpha_1 (x^3 + x^2) + \alpha_2 (x^2 - 2x - 4) + \alpha_3 (3x + 4) + \alpha_4 (2x + 3) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

Wir können $p_1, \dots, p_4$ als Vektoren schreiben.

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad p_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Unser Problem wird dann zu:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Das können wir in die Form $Ax = b$ bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 3 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{cases} \alpha_4 = 1 \\ 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 2 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = 2 \end{cases}$$

$\rightarrow$ $\underline{\underline{2p_1 + p_2 + p_4}} = 2x^3 + 3x^2 - 1$

b.) Sind p_1, p_2, p_3, p_4 für $\mathcal{P}_4$ (Polynome von Grad 4) erzeugend?

Durch Linearkombinationen von Funktionen von Grad 3 können wir nie eine Funktion von Grad 4 erhalten.

c.) Sei $\text{span}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \mathcal{P}_3$ (Polynome von Grad 3).
Bilden p_1, p_2, p_3, p_4 eine Basis von $\mathcal{P}_3$?

Sind p_1, p_2, p_3, p_4 linear unabhänig?

Wir können $p_1, \dots, p_4$ als Vektoren schreiben.

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad p_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dann gilt für:

$$B = (p_1, p_2, p_3, p_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4.4 Lineare Unabhängigkeit

$$\boxed{\sum x_i \cdot v_i = 0}$$

Die Vektoren v_i sind linear unabhängig, falls die Summe $\sum$ nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_i = 0$ hat.

Prüfen, ob Vektoren linear unabhängig:

1. Matrix mit Vektoren als Spalten erstellen: $V = (v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(n)})$
2. Der Rang ist die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren. $rang(V) = n \Longrightarrow$ Vektoren sind linear unabhängig.

Rang(B) = # lin. unabhänige Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{voller Rang}$$

$\rightarrow$ $\text{Span}\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ ist eine Basis von $\mathcal{P}_3$.

Tipps zur Serie

1.) Sinnvoll. Prüfe Axiome, analog zu letzter Übung.

2.) Wenig relevant. Nochmals für Intuition von Determinante.

3.) Wenig relevant.

4.) a.) Formel für 3×3 Determinante brauchen.

b.) Werte einsetzen und geschickt Determinante berechnen.