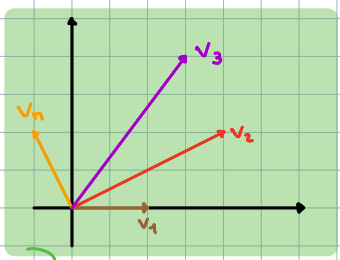
Übung 14 (22.12.23)

Recap

Sei $v := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, dann ist v eine Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$.

Die Menge aller Linearkombinationen nennt sich Lineare Hülle und wird mit $\text{span}(v_1, \dots, v_n)$ abgekürzt.

Diese Menge aller Linearkombinationen ist ein Vektorraum V. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind dann ein Erzeugendensystem von V. Es lassen sich alle Vektoren in V durch eine Linearkombination der Erzeugendenvektoren bilden.



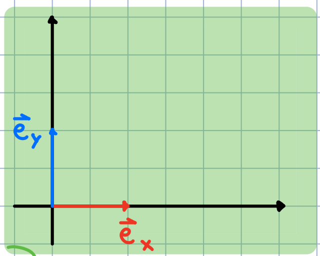
Vektorraum $V = \text{span}(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$

Wenn alle Vektoren $v_1, \dots, v_n$ eines Erzeugendensystems linear unabhänig sind, dann bilden sie eine Basis. Die Vektoren heissen dann Basisvektoren.

In 2-D wird oft die „Standartbasis" $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ verwendet.

Wobei: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jeder Vektor kann eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden.

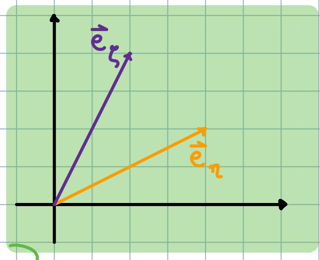


Vektorraum $V = \text{span}(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$

Wir können jedoch auch andere linear unabhängige Vektoren als Basisvektoren verwenden.

Seien z.B. $\vec{e}_\eta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Jeder Vektor kann <u>eindeutig</u> als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden.



Vektorraum $V = \text{span}(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\xi)$

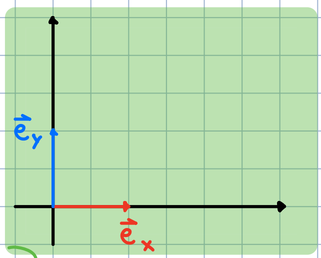
Die Anzahl von Basisvektoren bleibt jedoch erhalten. Diese Anzahl nennt man Dimension.

In unserem Fall mit $V = \text{span}(\vec{e}_x, \vec{e}_y) = \text{span}(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\xi)$, hat der VR V die Dimension 2.

Koordinaten

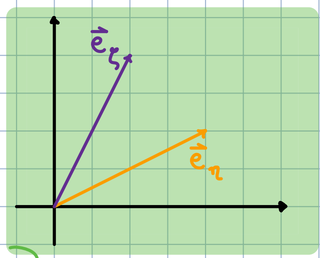
Es ist also möglich mehrere Basen für einen endlichdimensionalen Vektorraum zu finden.

z.B.:



Vektorraum $V = \text{span}(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$

Wobei: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



Vektorraum $V = \text{span}(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\xi)$

Wobei: $\vec{e}_\eta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Versuchen wir nun einen spezifischen Vektor in der Standartbasis $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ auszudrücken.

Zum Beispiel $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

D.h. $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, wir erkennen sofort, dass $x_1 = x_2 = 3$ sein muss.

Somit ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor bezüglich der Standartbasis $\vec{e}_x, \vec{e}_y$.

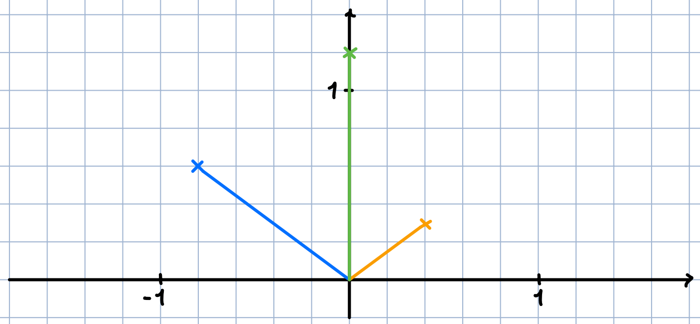
Nun wollen wir den selben Vektor in der Basis $\vec{e}_\eta, \vec{e}_\xi$ beschreiben. D.h. die Linearkombination von $\vec{e}_\eta, \vec{e}_\xi$ die den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ergibt.

$\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ wir erkennen sofort, dass $x_1 = x_2 = 1$ sein muss

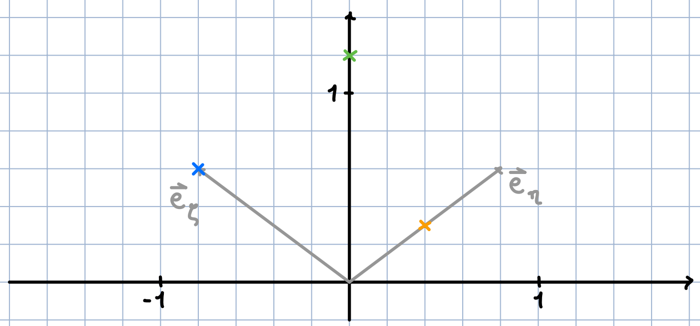
nun ist $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor bezüglich der Basis $\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$.

Jeder beliebiger Vektor lässt sich also in verschiedenen Basen ausdrücken. Dabei können bestimmte Darstellungen praktischer sein als andere.

Betrachten wir z.B. die Vektoren $\begin{pmatrix}0{,}4\\0{,}3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0{,}8\\0{,}6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1{,}2\end{pmatrix}$



Wenn wir unsere Basis klug wählen lassen sich die Vektoren einfacher schreiben. Nehmen wir beispielsweise die Basisvektoren $\begin{pmatrix}0{,}8\\0{,}6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0{,}8\\0{,}6\end{pmatrix}$



Die Vektoren $\left[\begin{pmatrix}0{,}4\\0{,}3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0{,}8\\0{,}6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1{,}2\end{pmatrix}\right]_{xy}$ lassen sich nun mit der Basis $\begin{pmatrix}0{,}8\\0{,}6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0{,}8\\0{,}6\end{pmatrix}$

einfacher als $\left[\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_{\eta\zeta}$ schreiben

Der Koordinatenvektor hängt also von der Basis ab!

Beispielaufgabe

Sei $\mathcal{P}_2$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Sei

$$\mathcal{B} = \{ b^{(1)} = 1,\ b^{(2)} = x,\ b^{(3)} = 3x^2 - 1 \}$$

eine Basis.

a.) Zeige dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{P}_2$ ist.

Aus der V2 wissen wir dass für $\mathcal{P}_2$, die Vektoren einer Basis genau dann erzeugend sind, wenn man $1, x, x^2$ als eine Linearkombination schreiben kann.

$\rightarrow\ 1 = b^{(1)}$

$\rightarrow\ x = b^{(2)}$

$\rightarrow\ x^2 = \frac{1}{3} b^{(1)} + \frac{1}{3} b^{(3)}$

b.) Schreibe das Polynom $p(x) = 11x^2 - 2x + 1$ in den Koordinaten der Basis $\mathcal{B}$.

Es muss gelten

$$11x^2 - 2x + 1 = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot (3x^2 - 1)$$

mit Koeffizientenvergleich.

$11 = 3a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{11}{3}$

$-2 = a_2 \Rightarrow a_2 = -2$

$1 = a_1 - \frac{11}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{14}{3}$

Der Vektor mit den Koordinaten von $\mathcal{B}$ ist dann

$$[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ -2 \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$