Lineare Algebra II

Übung 01 (21.02.25)

nbartzsch

Recap

Was haben wir in den letzten Stunden von LinAlg I gesehen?

(Für eine Wiederholung vom vorherigen Stoff siehe LinAlg I Woche 10)

Vektorräume:

Wir wollen unsere Vorstellung von Vektoraddition und Multiplikation, von den uns bekannten Vektorpfeilen im Raum und Ebene, auf alle möglichen Vektoren abstrahieren (verallgemeinern). Damit können wir dann später die Eigenschaften von Vektoren auch auf z.B. Funktionen (welche sich als Vektoren darstellen lassen) anwenden.

4. Vektorräume

4.1 Definition Vektorraum

Sei V eine Menge von Objekten. V heisst Vektorraum, wenn eine **innere Operation** (Kombination von zwei Objekten) und eine **äussere Operation** (Kombination eines Objekts mit einem Skalar) definiert sind, und folgende Axiome gelten:

Innere Operation:

$$\bigoplus: V \times V \to V, \quad (a, b) \mapsto a \bigoplus b$$

Äussere Operation:

$$\bigodot: \mathbb{K} \times V \to V, \quad (\alpha, a) \mapsto \alpha \bigodot a$$

Es müssen nun sowohl eine innere Operation, als auch eine äussere Operation definiert werden.

$\oplus: V \times V \to V$ ($\oplus$ nimmt zwei Vektoren aus der Menge V und ordnet dem Paar einen anderen Vektor in V zu.)

$(a, b) \mapsto a \oplus b$ (so wird die innere Operation ausgeführt)

$\odot: \mathbb{R} \times V \to V$ ($\odot$ nimmt einen Vektor und einen Skalar und produziert einen neuen Vektor in V)

$(\alpha, a) \mapsto \alpha \odot a$ (so wird die äussere Operation ausgeführt)

Nun müssen, basierend auf den inneren und äusseren Operationen, folgende Axiome gelten.

Axiome:

(A1) $\forall u, v \in V:$ $\quad u \bigoplus v = v \bigoplus u$

(A2) $\forall u, v, w \in V:$ $\quad (u \bigoplus v) \bigoplus w = u \bigoplus (v \bigoplus w)$

(A3) $\exists 0 \in V, \forall u \in V:$ $\quad u \bigoplus 0 = u$

(A4) $\forall u \in V, \exists -u \in V:$ $\quad u \bigoplus (-u) = 0$

(M1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V:$ $\quad (\alpha \cdot \beta) \bigodot u = \alpha \bigodot (\beta \bigodot u)$

(M2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V:$ $\quad (\alpha + \beta) \bigodot u = (\alpha \bigodot u) \bigoplus (\beta \bigodot u)$
$\quad \alpha \bigodot (u \bigoplus v) = (\alpha \bigodot u) \bigoplus (\alpha \bigodot v)$

(M3) $\forall u \in V:$ $\quad 1 \bigodot u = u$

Nun kennen wir alle Regeln und können überprüfen ob eine Menge einen Vektorraum beschreibt. Dafür müssen wir alle Axiome prüfen.

ACHTUNG!

→ Operationen sind wichtig! nicht Objekte

Unterräume:

Ein Unterraum ist eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraums welche folgende Eigenschaften erfüllt.

(i) $\forall\ a, b \in U: \quad a+b \in U$ → Summe von zwei Elementen von U ist weiterhin Teil von U

(ii) $\forall\ a \in U, \alpha \in \mathbb{R}: \quad \alpha \cdot a \in U$ → Wird ein Element von U mit einem Skalar multipliziert, so ist das skalierte Element weiterhin Teil von U.

Ein Unterraum ist selber auch ein Vektorraum und enthält immer den Nullvektor

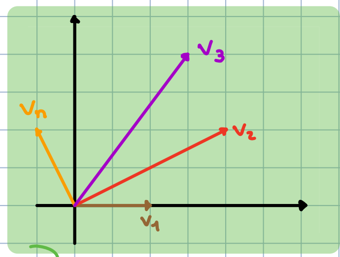
Erzeugendensystem / Basis:

Sei $v := \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, dann ist v eine Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$.

Die Menge aller Linearkombinationen nennt sich Lineare Hülle und wird mit $\text{span}(v_1, \dots, v_n)$ abgekürzt.

Diese Menge aller Linearkombinationen ist ein Vektorraum V. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind dann ein Erzeugendensystem von V.

Es lassen sich alle Vektoren in V durch eine Linearkombination der Erzeugendenvektoren bilden.



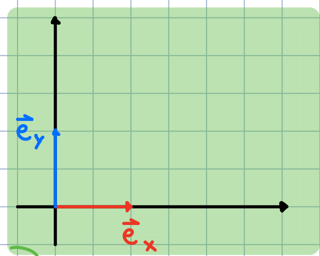
Vektorraum $V = \mathrm{span}(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$

Wenn alle Vektoren $v_1, \dots, v_n$ eines Erzeugendensystems linear unabhänig sind, dann bilden sie eine Basis. Die Vektoren heissen dann Basisvektoren.

In 2-D wird oft die „Standartbasis" $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ verwendet.

Wobei: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jeder Vektor kann eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden.

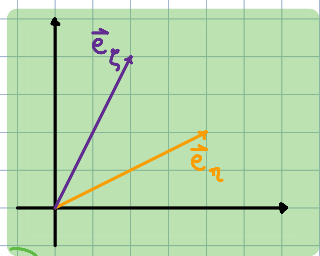


Vektorraum $V = \mathrm{span}(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$

Wir können jedoch auch andere linear unabhänige Vektoren als Basisvektoren verwenden.

Seien z.B. $\vec{e}_\eta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_\zeta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Jeder Vektor kann eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden.



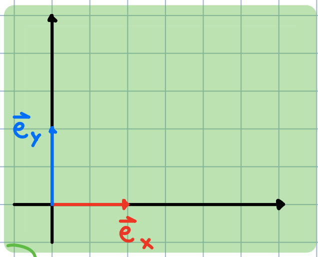
Vektorraum $V = \mathrm{span}(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$

Die Anzahl von Basisvektoren bleibt erhalten. Diese Anzahl nennt man Dimension.

In unserem Fall mit $V = \mathrm{span}(\vec{e}_x, \vec{e}_y) = \mathrm{span}(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$, hat der VR V die Dimension 2.

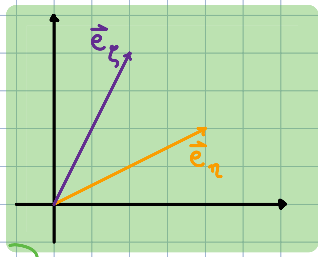
Es ist also möglich mehrere Basen für einen endlichdimensionalen Vektorraum zu finden.

z.B.:



Vektorraum $V = \text{span}(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$

Wobei: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



Vektorraum $V = \text{span}(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$

Wobei: $\vec{e}_\eta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_\zeta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Versuchen wir nun einen spezifischen Vektor in der Standartbasis $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ und der Basis $\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ auszudrücken. Betrachten wir hierfür zunächst $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, wir erkennen sofort, dass $x_1 = x_2 = 3$ sein muss.

Somit ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}_{xy}$ der Koordinatenvektor bezüglich der Standartbasis $\vec{e}_x, \vec{e}_y$.

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ wir erkennen sofort, dass $x_1 = x_2 = 1$ sein muss

nun ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\eta\zeta}$ der Koordinatenvektor bezüglich der Basis $\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$.

<u>Der Koordinatenvektor hängt also von der Basis ab.!</u>

Lineare Abbildungen

Seien V und W reelle Vektorräume. Dann heisst

$$F: V \to W, \quad x \mapsto F(x)$$

lineare Abbildung falls $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

i. $F(x+y) = F(x) + F(y)$ und ii. $F(\alpha x) = \alpha F(x)$

wenn wir nun prüfen wollen ob eine Abbildung linear ist, dann müssen wir prüfen ob i. und ii. gelten

Beispiele:

- $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x$

  i. $F(x+y) = 3(x+y) = 3x + 3y = F(x) + F(y)$

  ii. $F(\alpha x) = 3(\alpha x) = \alpha \cdot 3x = \alpha F(x)$

  linear

- $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x + 2$

  i. $F(x+y) = 3(x+y) + 2 = 3x + 3y + 2 \neq F(x) + F(y)$ nicht linear (affin linear)

Weitere Eigenschaften von linearen Abbildungen:

- 0 wird auf 0 abgebildet
- sind V und W endlichdimensional z.B. $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, dann kann jede lineare Abbildung $F: V \to W$ durch eine $m \times n$ - Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beschrieben werden

$$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto Ax$$

A heisst dann Abbildungsmatrix von F

Beispiel:

- $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-2y \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Beispielaufgabe

1.) Sei die Abbildung $\mathcal{F}$ gegeben durch:

- $\mathcal{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
  $(x_1, x_2)^T \mapsto (2x_1 + x_2, x_1)^T$

i.) ist $\mathcal{F}$ linear?

$$\mathcal{F}(x+y) = \begin{pmatrix} 2(x_1+y_1) + x_2+y_2 \\ x_1+y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$$

$$\mathcal{F}(\alpha x) = \begin{pmatrix} \alpha \cdot 2x_1 + \alpha \cdot x_2 \\ \alpha \cdot x_1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \alpha \mathcal{F}(x)$$

<u>$\mathcal{F}$ ist linear</u>

ii.) falls $\mathcal{F}$ linear ist, bestimme die Abbildungsmatrix A

- $\mathcal{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.) Sei die Abbildung $\mathcal{F}$ gegeben durch:

- $\mathcal{F}: C([x_0, x_1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
  $g(x) \mapsto \int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx$

$C([x_0, x_1], \mathbb{R})$ = alle stetigen Funktionen auf dem Interall $[x_0, x_1]$

i.) ist $\mathcal{F}$ linear?

$$\mathcal{F}(g+h) = \int_{x_0}^{x_1} g(x) + h(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} h(x)\,dx = \mathcal{F}(g) + \mathcal{F}(h)$$

$$\mathcal{F}(\alpha g) = \int_{x_0}^{x_1} \alpha \cdot g(x)\,dx = \alpha \cdot \int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx = \alpha \mathcal{F}(g)$$

<u>$\mathcal{F}$ ist linear</u>

3.) Sei $V = \mathcal{P}_2$ und $W = \mathcal{P}_1$. Wobei V durch die Basis $B = (1, x, x^2)$ und W durch die Basis $C = (1, x)$ beschrieben werden kann. Sei ausserdem

$$\begin{aligned} F: \mathcal{P}_2 &\to \mathcal{P}_1 \\ p(x) &\mapsto p'(x) + p''(x) \end{aligned}$$

Bestimme die Abbildungsmatrix A der Abbildung F.

Hierfür betrachten wir wie die Basisvektoren von V durch F verändert werden:

- $p_1(x) = 1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad F(p_1(x)) = 1' + 1'' = 0 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $p_2(x) = x \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad F(p_2(x)) = x' + x'' = 1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $p_3(x) = x^2 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad F(p_3(x)) = (x^2)' + (x^2)'' = 2x + 2 \to \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$ entsprechen jeweils der 1., 2., 3. Spalte von A d.h.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tipps zur Serie

1.– 9.) MC-Aufgaben wie in Übung machen. Als extra training Matrix aufschreiben

10.) Zeichnen

11.) U_{0-3} als Vektoren mit Basis $B = (1, x, x^2, x^3)$ schreiben.

Wann bilden Vektoren eine Basis?

12.) Schwer aber wichtig!

a.) Wann bilden Vektoren eine Basis? Was muss geändert werden?

b.) Gleich wie a.)

c.) Schwer, siehe Rechenbeispiel.

↳ Bestimme ein LGS welches $\text{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} \right\}$ als Lösungsraum hat.

Nehmen wir ein HLGS: $Ax = 0$

1.) Anzahl Spalten von A muss 3 sein, da $x \in \mathbb{R}^3$

2.) Einträge von A bestimmen:

Jede Zeile von A muss folgende Gleichungen erfüllen. Da

$$A \cdot b_1 = 0 \rightarrow \alpha A \cdot b_1 = 0$$
$$A \cdot b_2 = 0 \rightarrow \beta A \cdot b_2 = 0$$
$$\alpha A \cdot b_1 + \beta A \cdot b_2 = 0$$
$$A(\alpha \cdot b_1 + \beta b_2) = 0$$

$$(a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (1 \;\; 2 \;\; 1)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = 0$$

$$(a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (0 \;\; 1 \;\; 3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = 0$$

Zusammengeführt ergibt das

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad a_3 = t, \; a_2 = -3t, \; a_1 = 5t$$

A ist daher

$$A = (a_1, a_2, a_3) = (5 \;\; -3 \;\; 1)$$

$$Ax = (5 \;\; -3 \;\; 1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 0$$