Recap

Seien V und W reelle Vektorräume. Dann heisst

$$F: V \to W, \quad x \mapsto F(x)$$

lineare Abbildung falls $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

i. $F(x+y) = F(x) + F(y)$ und ii. $F(\alpha x) = \alpha F(x)$

wenn wir nun prüfen wollen ob eine Abbildung linear ist, dann müssen wir prüfen ob i. und ii. gelten

Weitere Eigenschaften von linearen Abbildungen:

- 0 wird auf 0 abgebildet
- sind V und W endlichdimensional z.B. $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, dann kann jede lineare Abbildung $F: V \to W$ durch eine $m \times n$ - Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beschrieben werden

$$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto Ax$$

A heisst dann Abbildungsmatrix von F

Beispiel:

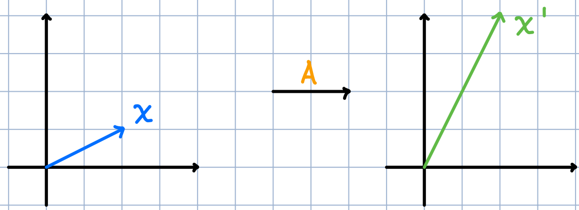
- $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-2y \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

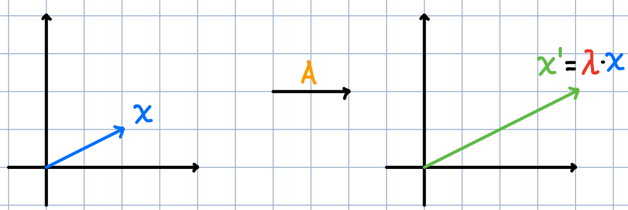
Eigenwertproblem

Betrachten wir zunächst eine lineare Abbildung gegeben durch $x \mapsto Ax$ ($A \in \mathbb{C}^{n \times n}$)

Wie wir bereits in LinAlg I schnell sahen, kann diese Abbildung analog zu einer Funktion interpretiert werden. Die Abbildung nimmt einen Vektor x und bildet ihn auf den Vektor $x' = Ax$ ab.



Wir fragen uns nun, ob es bestimmte Eingabevektoren x gibt, welche durch die Abbildung $x \mapsto Ax$ nur um einen Faktor λ gestreckt bzw. gestaucht werden.



Wir wissen also, dass in diesem Fall für eine Abbildung, gegeben durch $x \mapsto Ax$, folgendes gelten muss: $Ax = x' = \lambda \cdot x$. Aus dem bekommen wir dann die allgemeine Gleichung:

$$\boxed{Ax = \lambda x}$$

Der Vektor welcher durch die Abbildung nur gestreckt bzw. gestaucht wird, nennt sich **Eigenvektor**.

Der Faktor λ, um welchen gestreckt bzw. gestaucht wird, wird **Eigenwert** genannt.

Eigenwerte:

Wir suchen also ein λ sodass $Ax = \lambda x$ gilt. Wobei $x \neq 0$. Durch umstellen erhalten wir ein HLGS der Form:

$$(A - \lambda \mathbb{I})x = 0$$

Wann hat dieses HLGS nur nicht triviale Lösungen ($x \neq 0$)

3.4 Wichtige Zusammenhänge

Folgende Aussagen sind für $A^{n \times n}$ äquivalent:

- Das homogene LGS $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung.
- $det(A) \neq 0$

Das HLGS hat nicht triviale Lösungen genau dann wenn $\boxed{\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0}$

Mit dieser Gleichung können wir nun λ bestimmen.

Bsp:

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, bestimme alle Eigenwerte λ_i von A.

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & -6-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (3-\lambda)(-6-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\underline{\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 3, \ \lambda_3 = -6}$$

Das Polynom $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda \mathbb{I})$ heisst characteristisches Polynom. Wenn $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dann ist $p_A(\lambda)$ ein Polynom n-ten Grades.

In unserem Beispiel ist der EW 3 eine doppelte Nullstelle des characteristisches Polynoms.

Wir sagen also, dass die algebraische Vielfachheit des EW 3, gleich 2 ist. D.h.:

$\lambda_{1,2} = 3$ mit algebraischer Vielfachheit 2

$\lambda_3 = -6$ mit algebraischer Vielfachheit 1

Merkmale von EW von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

i. A hat mindestens einen EW $\lambda \in \mathbb{C}$

ii. A hat höchstens n EW $\lambda \in \mathbb{C}$

iii. A hat genau n EW $\lambda \in \mathbb{C}$, wenn man die EW mit ihrer algebraischen Vielfachheit zählt.

Weitere Definitionen zu EW:

i. Die Menge aller EW von A heisst Spektrum von A

ii. Zwei Matrizen A, B $\mathbb{C}^{n \times n}$ heissen ähnlich, wenn für eine reguläre Matrix T $\mathbb{C}^{n \times n}$ gilt $B = T^{-1} A T$. A und B haben dann:
 - das selbe characteristische Polynom
 - die selben EW mit den selben alg. Vf.
 - das selbe Spektrum
 - die selbe Determinante

Eigenvektoren:

Wir wissen nun wie wir EW bestimmen, nun müssen wir noch die dazugehörigen **Eigenvektoren EV** bestimmen. D.h. den Vektor x finden für welchen gilt:

$$Ax = \lambda x \quad (x \neq 0).$$

Das Problem kann wieder zu $(A - \lambda \mathbb{I})x = 0$ umgeschrieben werden. Nun setzen wir einen der EW ein und lösen das HLGS. Demnach sind die EV immer mit einem EW verbunden.

Bsp:

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, mit Eigenwerten $\lambda_{1,2} = 3$ und $\lambda_3 = -6$. Bestimme die EV.

v_{λ_1}: $(A - \lambda_1 \mathbb{I})x = (A - 3\mathbb{I})x = 0$

$$\rightarrow \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = 0 \longrightarrow x_3 = t \in \mathbb{R};\ x_2 = 0;\ x_1 = 0$$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \quad \text{oder} \quad E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

v_{λ_3}: $(A - \lambda_3 \mathbb{I})x = (A + 6\mathbb{I})x = 0$

$$\rightarrow \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \right) x = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} x = 0 \longrightarrow x_1 = 0;\quad x_2 = -9x_3$$

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad E_{\lambda_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

v_{λ_2}: $(A - \lambda_2 \mathbb{I})x = (A - 3\mathbb{I})x = 0$

$v_{\lambda_1} = v_{\lambda_2}$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \quad \text{oder} \quad E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Da wir hier ein HLGS mit $\det = 0$ lösen wird es immer unendlich viele Lösungen für $(A - \lambda \mathbb{I})x = 0$ geben. D.h. jede mögliche Linearkombination von EV von einem EW ist auch wieder ein EV. Der dadurch aufgespannte Vektorraum ist dann ein Unterraum von $\mathbb{C}^n$ und nennt sich **Eigenraum**.

Eigenräume werden mit E_{λ_i} bezeichnet.

Bsp:

Sei $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, mit Eigenwerten $\lambda_{1,2}=1$ und $\lambda_3=4$. Bestimme die EV.

$E_{\lambda_1}=E_{\lambda_2}=E_1 : (A-\lambda\mathbb{I})x=(A-1\mathbb{I})x=0$

$$\rightarrow \left(\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)x=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}x=0$$

Gauss: $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}x=0 \rightarrow$ zwei freie Parameter:

$x_3=t$; $x_2=s$ $\quad s,t\in\mathbb{R}$

$x_1=-t-s$

$$E_1=\left\{\begin{pmatrix}-t-s\\s\\t\end{pmatrix}\middle|\, s,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\middle|\, s,t\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

E_4 analog.

In diesem Beispiel ist also der Eigenraum E_1 zum Eigenwert $\lambda_1=1$ beschrieben durch $E_1=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Die Dimension des Eigenraums $\dim(E_{\lambda_i})$ heisst geometrische Vielfachheit von λ_i.

In unserem Beispiel ist also die geometrische Vielfachheit von $\lambda_1=2$.

Die geom. Vf ist gleich der Anzahl der freien Parameter im HLGS $(A-\lambda\mathbb{I})x=0$

→ Allgemein ist immer zu beachten, dass für einen EW λ von $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ gelten muss:

$$1\leq \text{geom. Vf. von } \lambda \leq \text{alg. Vf. von } \lambda \leq n$$

Beispielaufgabe

1.) BP 2014 Winter - Aufgabe 2a.) (Angepasst)

Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

Berechnen sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren, mit deren Vielfachheiten.

i.) EW : $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$

$$\det\left(\begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 4 & -4 \\ 0 & 5-\lambda & -8 \\ 0 & 4 & -7-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$= (-3-\lambda) \cdot \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -8 \\ 4 & -7-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda) \cdot [(5-\lambda)(-7-\lambda) + 32]$$

$$= (-3-\lambda) \cdot [\lambda^2 + 2\lambda - 3]$$

$$= (-3-\lambda)(\lambda+3)(\lambda-1) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_{2,3} = -3$$

> EW: $\lambda_1 = 1$ mit alg. Vf. 1
>
> $\lambda_2 = -3$ mit alg. Vf. 2

ii.) EV : $(A - \lambda \mathbb{I})x = 0$

$$E_1 : (A - \mathbb{I})x = \left(\begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)x = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}x = 0$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}x = 0$$

1 freier Parameter
$x_3 = t$
$x_2 = 2x_3 = 2t$
$x_1 = x_2 - x_3 = t$

> $\longrightarrow E_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ geom. Vf. 1

$$E_{-3} : (A + 3\mathbb{I})x = \left(\begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)x = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}x = 0$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}x = 0$$

2 freie Parameter
$x_1 = s$; $x_2 = t$
$x_3 = x_2 = t$

> $\longrightarrow E_{-3} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ geom. Vf. 2

2.) Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Tipp: Komplexe EW und EV treten <u>immer</u> in Komplex-konjugierten Paaren auf!

Berechnen sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

i.) EW : $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$

$$\det\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & -1 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$= (1-\lambda) \cdot \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \cdot [(-1-\lambda)^2 + 1]$$

$$= (1-\lambda) \cdot [1 + 2\lambda + \lambda^2 + 1]$$

$$= (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 + 2\lambda + 2)$$

z.B. $\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$$\boxed{\lambda_1 = 1 \;,\; \lambda_2 = -1+i \;,\; \lambda_3 = -1-i}$$

Komplexe EW treten immer in Komplex-konjugierten Paaren auf!

ii.) EV : $(A - \lambda \mathbb{I})x = 0$

$$E_1 : (A - \mathbb{I})x = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)x = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}x = 0 \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_3 = 0 \\ x_2 = t \end{array}$$

$$\boxed{\longrightarrow E_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}}$$

$$E_{-1+i} : (A - \mathbb{I})x = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1+i & 0 & 0 \\ 0 & -1+i & 0 \\ 0 & 0 & -1+i \end{pmatrix}\right)x = \begin{pmatrix} -i & 0 & -1 \\ 3 & 2-i & -1 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix}x = 0$$

$\boxed{-3i}$ $\boxed{-i}$

$$= \begin{pmatrix} -i & 0 & -1 \\ 0 & 2-i & 3i-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}x = 0$$

1 freier Parameter : $x_3 = t$

$$(2-i)x_2 = -(3i-1)x_3$$

$$x_2 = \frac{1-3i}{2-i}t = \frac{1-3i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i}t$$

$$= \frac{2+i-6i+3}{4+1} = \frac{5-5i}{5} \Rightarrow x_2 = (1-i)t$$

$$-ix_1 = x_3 \Rightarrow x_1 = it$$

$$\boxed{\longrightarrow E_{-1+i} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$$

Komplexe EV treten immer in Komplex-konjugierten Paaren auf!

$$\boxed{\longrightarrow E_{-1-i} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -i \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$$

Tipps zur Serie

1-3.) MC

→ Nach Rezept oder Antworten einsetzen.

4.) Wichtig

→ Zeitaufwändig, lohnt sich aber.

→ In Aufgabenteil c kommen komplexe EW.

5.) MatLab

6.) Anwendung

→ EW und EV bestimmen

→ Wann ist $\frac{U_2}{I_2} = \frac{U_1}{I_1}$ (Tipp: Eigenvektor)