Recap

Seien V und W reelle Vektorräume. Dann heisst

$$F: V \to W, \quad x \mapsto F(x)$$

lineare Abbildung falls $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

i. $F(x+y) = F(x) + F(y)$ und ii. $F(\alpha x) = \alpha F(x)$

wenn wir nun prüfen wollen ob eine Abbildung linear ist, dann müssen wir prüfen ob i. und ii. gelten

Weitere Eigenschaften von linearen Abbildungen:

- 0 wird auf 0 abgebildet
- sind V und W endlichdimensional z.B. $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, dann kann jede lineare Abbildung $F: V \to W$ durch eine $m \times n$ - Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beschrieben werden

$$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto Ax$$

A heisst dann Abbildungsmatrix von F

Beispiel:

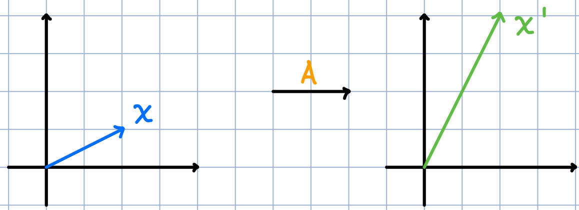
- $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-2y \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

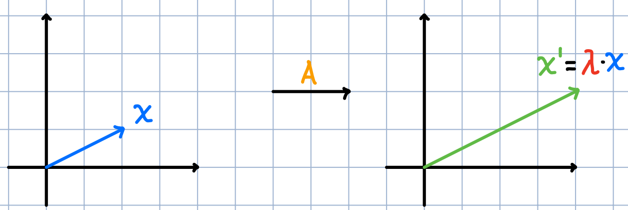
Eigenwertproblem

Betrachten wir zunächst eine lineare Abbildung gegeben durch $x \mapsto Ax$ ($A \in \mathbb{C}^{n\times n}$)

Wie wir bereits in LinAlg I schnell sahen, kann diese Abbildung analog zu einer Funktion interpretiert werden. Die Abbildung nimmt einen Vektor x und bildet ihn auf den Vektor $x' = Ax$ ab.



Wir fragen uns nun, ob es bestimmte Eingabevektoren x gibt, welche durch die Abbildung $x \mapsto Ax$ nur um einen Faktor λ .



Wir wissen also, dass in diesem Fall für eine Abbildung, gegeben durch $x \mapsto Ax$, folgendes gelten muss:

$Ax = x' = \lambda \cdot x$. Aus dem bekommen wir dann die allgemeine Gleichung:

$$\boxed{\quad = \quad}$$

Der Vektor welcher durch die Abbildung nur gestreckt bzw. gestaucht wird, nennt sich .

Der Faktor λ, um welchen gestreckt bzw. gestaucht wird, wird genannt.

Eigenwerte:

Wir suchen also ein λ sodass $Ax = \lambda x$ gilt. Wobei . Durch umstellen erhalten wir ein HLGS der Form:

Wann hat dieses HLGS nur nicht triviale Lösungen ($x \neq 0$)

Tipp:

3.4 Wichtige Zusammenhänge

Folgende Aussagen sind für $A^{n\times n}$ äquivalent:

- $rang(A) = n$
- Das LGS $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar.
- Das LGS $Ax = b$ besitzt genau eine Lösung.
- Das homogene LGS $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung.
- Die Zeilen/Spalten von A sind linear unabhängig.
- A ist invertierbar.
- $det(A) \neq 0$
- Die Spalten von A bilden eine Basis in $\mathbb{R}^n$.
- Der Kern von A besteht nur aus dem Nullvektor.
- Kein Eigenwert von A ist 0.
- A ist regulär.
- A ist nicht singulär.

Das HLGS hat nicht triviale Lösungen genau dann wenn ____

Mit dieser Gleichung können wir nun λ bestimmen.

<u>Bsp:</u>

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, bestimme alle Eigenwerte λ_i von A.

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & -6-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$\rightarrow (3-\lambda)(-6-\lambda)(3-\lambda) = 0$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -6$$

Das Polynom $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda \mathbb{I})$ heisst ____. Wenn $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dann ist $p_A(\lambda)$ ein Polynom ____

In unserem Beispiel ist der EW 3 eine doppelte Nullstelle des characteristisches Polynoms.

Wir sagen also, dass die ____ des EW 3, gleich 2 ist. D.h.:

$\lambda_{1,2} = 3$ mit algebraischer Vielfachheit 2

$\lambda_3 = -6$ mit algebraischer Vielfachheit 1

Merkmale von EW von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

i. A hat ____ einen EW $\lambda \in \mathbb{C}$

ii. A hat ____ n EW $\lambda \in \mathbb{C}$

iii. A hat ____ n EW $\lambda \in \mathbb{C}$, wenn man die EW mit ihrer algebraischen Vielfachheit zählt.

Weitere Definitionen zu EW:

i. Die Menge aller EW von A heisst ____ von A

ii. Zwei Matrizen $A, B\ \mathbb{C}^{n \times n}$ heissen ____, wenn für eine reguläre Matrix $T\ \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt $B = T^{-1}AT$. A und B haben dann:

das selbe characteristische Polynom

die selben EW mit den selben alg. Vf.

das selbe Spektrum

die Selbe Determinante

Eigenvektoren:

Wir wissen nun wie wir EW bestimmen, nun müssen wir noch die dazugehörigen **Eigenvektoren EV** bestimmen. D.h. den Vektor x finden für welchen gilt:

Das Problem kann wieder zu $(A-\lambda \mathbb{I})x=0$ umgeschrieben werden. Nun setzen wir einen der EW ein und lösen das HLGS. Demnach sind die EV immer mit einem EW verbunden.

Bsp:

Sei $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, mit Eigenwerten $\lambda_{1,2}=3$ und $\lambda_3=-6$. Bestimme die EV.

$v_{\lambda_1}: \ (A-\lambda_1\mathbb{I})x=(A-3\,\mathbb{I})x=0$

$$\rightarrow \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)x=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}x=0 \longrightarrow x_3=t\in\mathbb{R}\ ;\ x_2=0\ ;\ x_1=0$$

$$v^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot t \quad \text{oder} \quad E_{\lambda_1}=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$v_{\lambda_3}: \ (A-\lambda_3\mathbb{I})x=(A+6\,\mathbb{I})x=0$

$$\rightarrow \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\right)x=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}x=0 \longrightarrow x_1=0\ ;\ x_2=-9x_3$$

$$v^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad E_{\lambda_3}=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$v_{\lambda_2}: \ (A-\lambda_2\mathbb{I})x=(A-3\,\mathbb{I})x=0$

$v_{\lambda_1}=v_{\lambda_2}$

$$v^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot t \quad \text{oder} \quad E_{\lambda_2}=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Da wir hier ein HLGS mit $\det=0$ lösen wird es immer für $(A-\lambda\mathbb{I})x=0$ geben. D.h. jede mögliche Linearkombination von EV von einem EW ist auch wieder ein EV. Der dadurch aufgespannte Vektorraum ist dann ein Unterraum von $\mathbb{C}^n$ und nennt sich .

Eigenräume werden mit E_{λ_i} bezeichnet.

Bsp:

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, mit Eigenwerten $\lambda_{1,2} = 1$ und $\lambda_3 = 4$. Bestimme die EV.

$E_{\lambda_1} = E_{\lambda_2} = E_1 : (A - \lambda \mathbb{I})x = (A - 1\mathbb{I})x = 0$

$$\rightarrow \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = 0$$

Gauss: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0 \rightarrow$ zwei freie Parameter:

$x_3 = t$; $x_2 = s$ $\quad s,t \in \mathbb{R}$

$x_1 = -t-s$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -t-s \\ s \\ t \end{pmatrix} \middle| s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s,t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

E_4 analog.

In diesem Beispiel ist also der Eigenraum E_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ beschrieben durch $E_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Die Dimension des Eigenraums $\dim(E_{\lambda_i})$ heisst ______ von λ_i.

In unserem Beispiel ist also die geometrische Vielfachheit von $\lambda_1 = 2$.

Die geom. Vf ist gleich der Anzahl der ______ im HLGS $(A - \lambda \mathbb{I})x = 0$

→ Allgemein ist immer zu beachten, dass für einen EW λ von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gelten muss:

$$1 \leq \text{geom. Vf. von } \lambda \leq \text{alg. Vf. von } \lambda \leq n$$

Beispielaufgabe

1.) BP 2014 Winter - Aufgabe 2a.) (Angepasst)

Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

Berechnen sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren, mit deren Vielfachheiten.

2.) Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Tipp: Komplexe EW und EV treten <u>immer</u> in Komplex-konjugierten Paaren auf!

Berechnen sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

Tipps zur Serie

1-3.) MC

→ Nach Rezept oder Antworten einsetzen.

4.) Wichtig

→ Zeitaufwändig, lohnt sich aber.

→ In Aufgabenteil c kommen komplexe EW.

5.) MatLab

6.) Anwendung

→ EW und EV bestimmen

→ Wann ist $\frac{U_2}{I_2} = \frac{U_1}{I_1}$ (Tipp: Eigenvektor)