Übung 04 (14.03.25)

Recap

Normen:

Eine Norm ist eine fixe Regel mit welcher man jedem Vektor eine reelle positive Zahl zuordnen kann. Dadurch kann man sie dann Vergleichen.

Mathematisch lässt sich das wie folgt durch eine Abbildung ausdrücken:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

Achtung! es müssen bestimmte Bedingungen erfüllt sein damit eine Norm vorhanden ist.

$\forall\, v, w \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ muss gelten:

1. $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$
3. $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Skalarprodukte:

Skalarprodukte beschreiben die Beziehung zwischen zwei Vektoren mit einer reellen Zahl. Wieder lässt sich dies durch eine Abbildung beschreiben.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

Wobei folgende Bedingungen erfüllt werden müssen:

$\forall\, x, y, z \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ muss gelten:

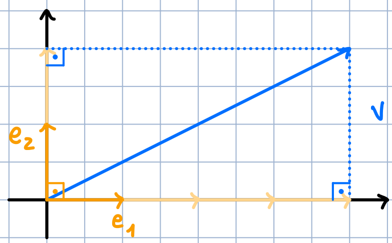
1. $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
2. $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Wenn $\langle x, y \rangle = 0$ dann sind x, y orthogonal $(x \perp y)$

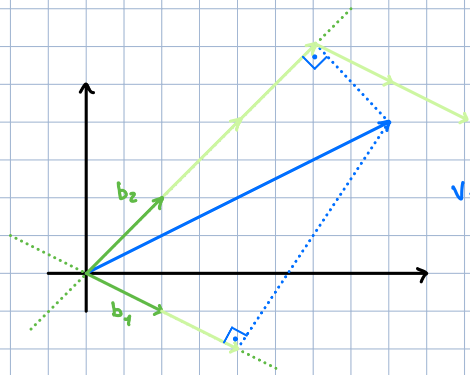
Mit dem Skalarprodukt kann eine Norm induziert werden. $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Orthonormalbasis

Was ist überhaupt eine Orthonormalbasis (ONB)?



$v = \left[\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\right]_e$



$v \neq \left[\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right]_b$

Bei einer Orthonormalbasis stehen die Basisvektoren senkrecht zueinander (orthogonal) und haben die Länge 1 (normal).

z.B.:

$$e = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Will man einen Vektor in dieser Basis darstellen, dann kann ihn einfach orthogonal projizieren.

Bei einer herkömmlichen Basis müssen die Basisvektoren weder orthogonal noch normal sein.

z.B.:

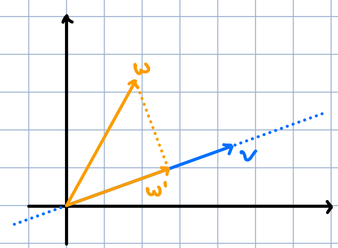
$$b = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Will man einen Vektor in dieser Basis darstellen, dann kann ihn nicht orthogonal projizieren. (LGS lösen)

Orthonormalprojektion:

Wie Ihr bereits in der BA8 hergeleitet habt, lässt sich ein Vektor w auf einen Vektor v wie folgt orthogonal projizieren.

$$w' = \frac{\langle w, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$$



Für unsere Orthonormalbasis bedeutet das nun folgendes. Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis des Vektorraums V, dann gilt $\forall x \in V$:

$$\boxed{x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k}$$

Wie können wir nun eine solche Orthonormalbasis finden? Bzw. kann ich aus jeder herkömmlichen Basis eine Orthonormalbasis basteln?

Ja!

Dazu benutzen wir das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren.

Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren:

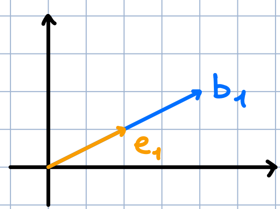
Dafür benötigen wir: eine beliebige Basis $B = \{b_1, \dots, b_k\}$

ein beliebiges Skalarprodukt

und produzieren damit eine Orthonormalbasis $E = \{e_1, \dots, e_k\}$

i.) Wähle einen beliebigen ersten Basisvektor b_1 und normiere ihn.

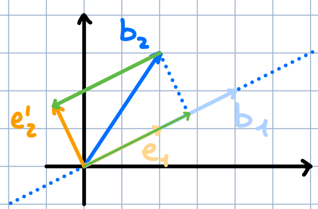
$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{b_1}{\sqrt{\langle b_1, b_1 \rangle}}$$



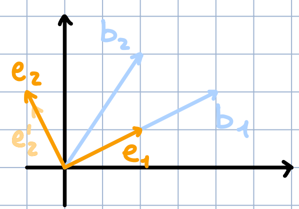
ii.) Wähle einen zweiten Basisvektor b_2, ziehe zuerst den zu b_1 parallelen Teil ab

$$e_2' = b_2 - \boxed{\langle b_2, e_1 \rangle \, e_1}$$

und normiere ihn dann



$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{e_2'}{\sqrt{\langle e_2', e_2' \rangle}}$$



iii.) Wiederhole für jeden weiteren Basisvektor b_i

$$e_i' = b_i - \langle b_i, e_1 \rangle e_1 - \langle b_i, e_2 \rangle e_2 - \dots - \langle b_i, e_{i-1} \rangle e_{i-1}$$

$$e_i = \frac{e_i'}{\|e_i'\|} = \frac{e_i'}{\sqrt{\langle e_i', e_i' \rangle}}$$

Das kommt SEHR oft bei Prüfungen dran!

Beispielaufgabe

1.) Sei auf $\mathcal{P}_4$ das folgende Skalarprodukt gegeben:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$$

finde eine Orthonormalbasis für den Vektorraum $\operatorname{span}\{1, 3x^4\}$.

→ Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren

$b_1 = 1 \quad , \quad b_2 = 3x^4$

i.) $e_1 = \dfrac{b_1}{\| b_1 \|} = \dfrac{b_1}{\sqrt{\langle b_1, b_1 \rangle}}$

$$\langle b_1, b_1 \rangle = \int_0^1 b_1 \cdot b_1 \, dx = \int_0^1 1 \, dx = 1$$

$\boxed{e_1 = 1}$

ii.) $e_2' = b_2 - \langle b_2, e_1 \rangle\, e_1$

$$\langle b_2, e_1 \rangle = \int_0^1 b_2 \cdot e_1 \, dx = \int_0^1 3x^4 \, dx = \left[\frac{3}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{3}{5}$$

$e_2' = b_2 - \frac{3}{5} = 3x^4 - \frac{3}{5}$

$e_2 = \dfrac{e_2'}{\| e_2' \|} = \dfrac{e_2'}{\sqrt{\langle e_2', e_2' \rangle}}$

$$\langle e_2', e_2' \rangle = \int_0^1 b_2 \cdot b_2 \, dx = \int_0^1 \left(3x^4 - \frac{3}{5}\right)^2 dx = \int_0^1 9x^8 - \frac{18}{5} x^4 + \frac{9}{25} \, dx$$

$$= \left[x^9 - \frac{18}{25} x^5 + \frac{9}{25} x \right]_0^1 = \frac{25}{25} - \frac{18}{25} + \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$\sqrt{\langle e_2', e_2' \rangle} = \frac{4}{5}$

$e_2 = \frac{5}{4}\left(3x^4 - \frac{3}{5}\right) = \frac{15}{4} x^4 - \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{e_2 = \frac{15}{4} x^4 - \frac{3}{4}}$

2.) Aus BP, S14, 3.a.)

Seien

$$v_1 = (1,1,1)^T \;,\; v_2 = (1,2,3)^T \;,\; v_3 = (1,4,9)^T$$

Wenden Sie das Gram-Schmidtsche-Orthogonalisierungsverfahren auf v_1, v_2, v_3 an (in dieser Reihenfolge), um eine Orthonormalbasis zu erhalten.

i.) $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}}$

$$\langle v_1, v_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\boxed{e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

ii.) $e_2' = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle \, e_1$

$$\langle v_2, e_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 6 = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$\langle v_2, e_1 \rangle \, e_1 = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{e_2'}{\sqrt{\langle e_2', e_2' \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

iii.) $e_3' = v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle \, e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle \, e_2$

$$\langle v_3, e_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{14}{\sqrt{3}}$$

$$\langle v_3, e_1 \rangle \, e_1 = \frac{14}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{14}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle v_3, e_2 \rangle = \begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

$$\langle v_3, e_2 \rangle\, e_2 = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$e_3' = v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle\, e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle\, e_2$$

$$= \begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix} - \frac{14}{3} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = \frac{e_3'}{\sqrt{\langle e_3', e_3' \rangle}}$$

$$\|e_3'\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$e_3 = \frac{3}{\sqrt{6}} \frac{1}{3} \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}$$

Tipps zur Serie

1.–6.) MC. Auf jeden Fall machen.

7.) Kochrezept! Versucht wirklich zu verstehen warum es funktioniert

Beim Orthogonalisieren mit $a^{(1)}$ anfangen.

8.) Wichtig! Vgl. Aufgabe aus Übungsstunde

9.) MATLAB

2.) Aus BP, S12, 2.b.)

Sei V der von den Funktionen $\{1, x, x^2, e^x\}$ aufgespannte Vektorraum mit dem Unterraum $U := \text{span}\{1, x, x^2\}$. Für zwei Funktionen $f, g \in V$ sei das folgende Skalarprodukt definiert:

$$\langle f, g \rangle := f(0)\, g(0) + f'(0)\, g'(0) + f''(0)\, g''(0) + f'''(0)\, g'''(0)$$

Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis in U bezüglich des gegebenen Skalarprodukts:

$x_4 = s \qquad x_3 = t$

$x_2 = \frac{3}{2}s - \frac{3}{2}t$

$x_1 = \frac{1}{4}t - \frac{3}{4}s$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}t - \frac{3}{4}s \\ \frac{3}{2}s - \frac{3}{2}t \\ t \\ s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s$$