Übung 04 (14.03.25)

Recap

Normen:

Eine Norm ist eine fixe Regel mit welcher man jedem Vektor eine reelle positive Zahl zuordnen kann. Dadurch kann man sie dann Vergleichen.

Mathematisch lässt sich das wie folgt durch eine Abbildung ausdrücken:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

Achtung! es müssen bestimmte Bedingungen erfüllt sein damit eine Norm vorhanden ist.

$\forall\, v, w \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ muss gelten:

1. $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$
3. $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Skalarprodukte:

Skalarprodukte beschreiben die Beziehung zwischen zwei Vektoren mit einer reellen Zahl. Wieder lässt sich dies durch eine Abbildung beschreiben.

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \; (x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$$

Wobei folgende Bedingungen erfüllt werden müssen:

$\forall\, x,y,z \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ muss gelten:

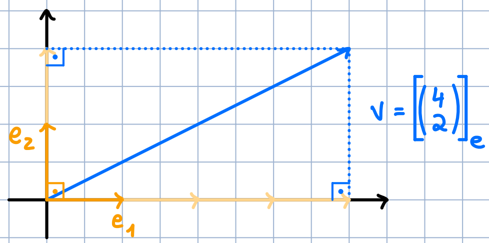
1. $\langle x, y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$
2. $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$
3. $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$
4. $\langle x,x \rangle \geq 0$ und $\langle x,x \rangle = 0 \iff x = 0$

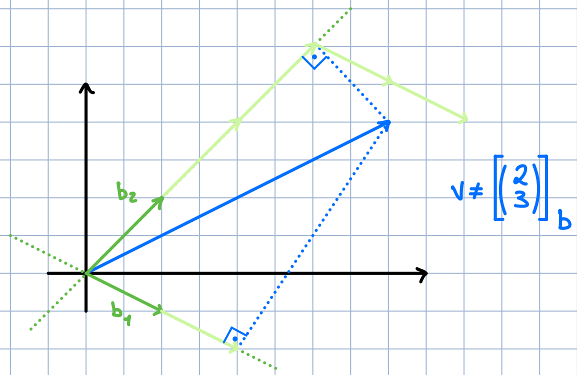
Wenn $\langle x,y \rangle = 0$ dann sind x,y orthogonal $(x \perp y)$

Mit dem Skalarprodukt kann eine Norm induziert werden. $\|x\| := \sqrt{\langle x,x \rangle}$

Orthonormalbasis

Was ist überhaupt eine Orthonormalbasis (ONB)?





Bei einer Orthonormalbasis stehen die Basisvektoren ____ zueinander (orthogonal) und haben die ____ (normal).

z.B.:

$$e = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Will man einen Vektor in dieser Basis darstellen, dann kann ihn einfach orthogonal ____

Bei einer herkömmlichen Basis müssen die Basisvektoren weder ____ noch ____ sein.

z.B.:

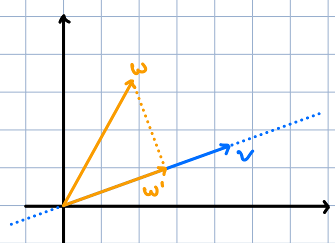
$$b = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Will man einen Vektor in dieser Basis darstellen, dann kann ihn ____ orthogonal projizieren. (LGS lösen)

Orthonormalprojektion:

Wie Ihr bereits in der BA8 hergeleitet habt, lässt sich ein Vektor w auf einen Vektor v wie folgt orthogonal projizieren.

$$w' = \frac{\langle \_\_, \_\_ \rangle}{\langle \_\_, \_\_ \rangle} \_\_$$



Für unsere Orthonormalbasis bedeutet das nun folgendes. Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis des Vektorraums V, dann gilt $\forall x \in V$:

$$\boxed{x = \sum \langle \quad \rangle}$$

Wie können wir nun eine solche Orthonormalbasis finden? Bzw. kann ich aus jeder herkömmlichen Basis eine Orthonormalbasis basteln?

<u>Ja!</u>

Dazu benutzen wir das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren.

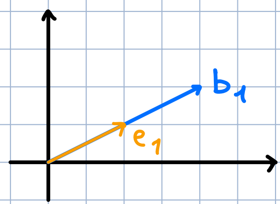
<u>Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren:</u>

Dafür benötigen wir: $B = \{b_1, \dots, b_k\}$

und produzieren damit eine Orthonormalbasis $E = \{e_1, \dots, e_k\}$

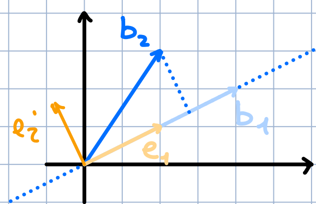
i.) Wähle einen beliebigen ersten Basisvektor b_1 und normiere ihn.

$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{\quad}{\sqrt{\langle \quad , \quad \rangle}}$$



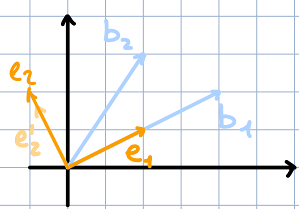
ii.) Wähle einen zweiten Basisvektor b_2, ziehe zuerst den zu b_1 parallelen Teil ab

$$e_2' = b_2 - \boxed{\langle \quad , \quad \rangle \quad}$$



und normiere ihn dann

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{e_2'}{\sqrt{\langle e_2', e_2' \rangle}}$$



iii.) Wiederhole für jeden weiteren Basisvektor b_i

$$e_i' = b_i - \langle b_i, e_1 \rangle e_1 - \langle b_i, e_2 \rangle e_2 - \dots - \langle b_i, e_{i-1} \rangle e_{i-1}$$

$$e_i = \frac{e_i'}{\|e_i'\|} = \frac{e_i'}{\sqrt{\langle e_i', e_i' \rangle}}$$

$$\boxed{\text{Das kommt SEHR oft bei Prüfungen dran!}}$$

Beispielaufgabe

1.) Sei auf $\mathcal{P}_4$ das folgende Skalarprodukt gegeben:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$$

finde eine Orthonormalbasis für den Vektorraum $\operatorname{span}\{1, 3x^4\}$.

2.) Aus BP, S14, 3.a.)

Seien

$$v_1 = (1,1,1)^T \ , \ v_2 = (1,2,3)^T \ , \ v_3 = (1,4,9)^T$$

Wenden Sie das Gram-Schmidtsche-Orthogonalisierungsverfahren auf v_1, v_2, v_3 an (in dieser Reihenfolge), um eine Orthonormalbasis zu erhalten.

Tipps zur Serie

1.–6.) MC. Auf jeden Fall machen.

7.) Kochrezept! Versucht wirklich zu verstehen warum es funktioniert

Beim Orthogonalisieren mit $a^{(1)}$ anfangen.

8.) Wichtig! Vgl. Aufgabe aus Übungsstunde

9.) MATLAB