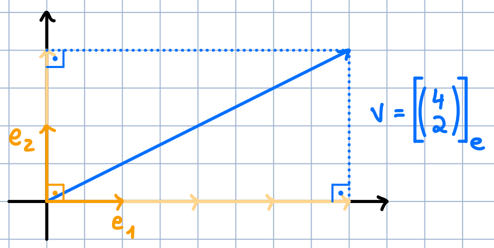
Übung 05 (21.03.25)

Feedback zur Übungsstunde geben! (Link per E-Mail erhalten)

Recap

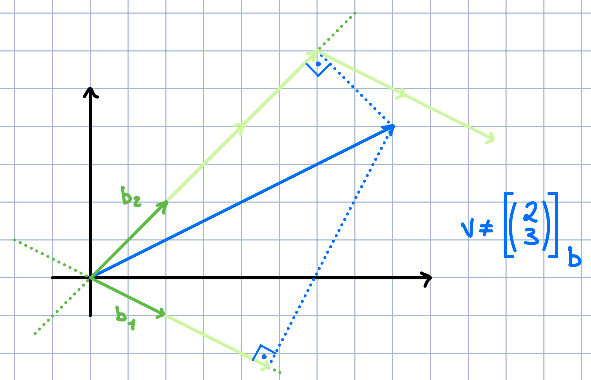
Orthonormalbasis (ONB)



Bei einer Orthonormalbasis stehen die Basisvektoren senkrecht zueinander (orthogonal) und haben die Länge 1 (normal).

z.B.: $e = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$

Will man einen Vektor in dieser Basis darstellen, dann kann ihn einfach orthogonal projizieren.



Bei einer herkömmlichen Basis müssen die Basisvektoren weder orthogonal noch normal sein.

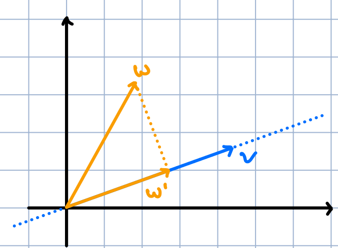
z.B.: $b = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$

Will man einen Vektor in dieser Basis darstellen, dann kann ihn nicht orthogonal projizieren. (LGS lösen)

Orthonormalprojektion:

Wie Ihr bereits in der BA8 hergeleitet habt, lässt sich ein Vektor w auf einen Vektor v wie folgt orthogonal projizieren.

$$w' = \frac{\langle w, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$$



Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis des Vektorraums V, dann gilt $\forall x \in V$:

$$\boxed{x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k}$$

Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren:

Dafür benötigen wir: eine beliebige Basis $B = \{ b_1, \dots, b_k \}$

ein beliebiges Skalarprodukt

und produzieren damit eine Orthonormalbasis $E = \{ e_1, \dots, e_k \}$

i.) Wähle einen beliebigen ersten Basisvektor b_1 und normiere ihn.

$$e_1 = \frac{b_1}{\| b_1 \|} = \frac{b_1}{\sqrt{\langle b_1, b_1 \rangle}}$$

ii.) Wähle einen zweiten Basisvektor b_2, ziehe zuerst den zu b_1 parallelen Teil ab

$$e_2' = b_2 - \langle b_2, e_1 \rangle e_1$$

und normiere ihn dann

$$e_2 = \frac{e_2'}{\| e_2' \|} = \frac{e_2'}{\sqrt{\langle e_2', e_2' \rangle}}$$

iii.) Wiederhole für jeden weiteren Basisvektor b_i

$$e_i' = b_i - \langle b_i, e_1 \rangle e_1 - \langle b_i, e_2 \rangle e_2 - \dots - \langle b_i, e_{i-1} \rangle e_{i-1}$$

$$e_i = \frac{e_i'}{\| e_i' \|} = \frac{e_i'}{\sqrt{\langle e_i', e_i' \rangle}}$$

Das kommt SEHR oft bei Prüfungen dran!

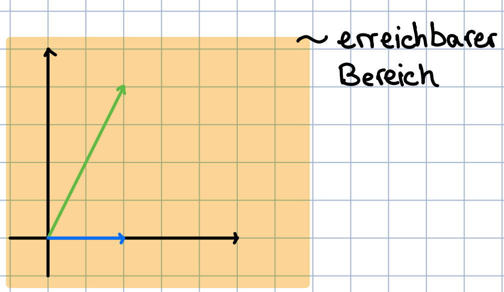
Bild

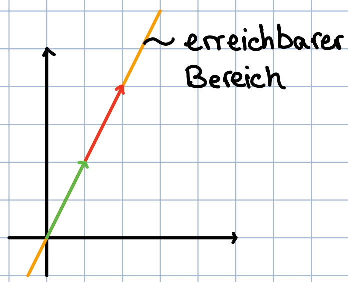
Ganz am Anfang von LinAlg I sahen wir die Matrix-Vektor-Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} x_3$$

Das heisst der „erreichbare Bereich" von Ax wird durch die Linearkombination der Spalten von A beschrieben. Zum Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$





$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} x_2$$

Dieser „erreichbare Bereich" nennt sich **Bild** einer Matrix. Die Diemension des Bildes ist der Rang.

Mathematisch formuliert:

$$\boxed{\text{Bild}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ sodass } y = Ax \}} \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- A ist invertierbar / regulär
- $\det(A) \neq 0$
- Zeilen / Spalten sind linear unabhängig
- Spalten von A sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$
- Das Bild von A ist n-Dimensional

Bsp.: Bestimme ein *Erzeugendensystem* für das Bild von A

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\3&1&5\\4&3&9\end{pmatrix} \longrightarrow \text{Bild}(A)=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\9\end{pmatrix}\right\}$$

- **Bild bestimmen:** $Bild = span\{a^{(1)}, a^{(2)} \dots a^{(n)}\}$
  Ist nach einem Erzeugendensystem gefragt, reicht es, einfach die Spaltenvektoren hinzuschreiben.

Bestimme eine Basis für das Bild von A

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\3&1&5\\4&3&9\end{pmatrix}$$

Aus Erzeugendensystem Basis finden:

1. Matrix aufstellen, deren Zeilen aus den transponierten erzeugenden Vektoren besteht.
2. Mit Gaussalgorithmus in Zeilenstufenform bringen. Dadurch wird lineare Abhängigkeit eliminiert.
3. Die verbleibenden Nicht-Nullzeilen sind Basisvektoren.

Nach Rezept:

$$\text{i}: \begin{pmatrix}1&3&4\\2&1&3\\4&5&9\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ii.) Gauss}} \begin{pmatrix}1&3&4\\0&-5&-5\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \text{Bild}(A)=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-5\\-5\end{pmatrix}\right\}$$

Wir können sehen, dass $\text{rang}(A)=\dim(\text{Bild}(A))$. Die Dimension des Bildes ist gleich der Anzahl Basisvektoren des Bildes.

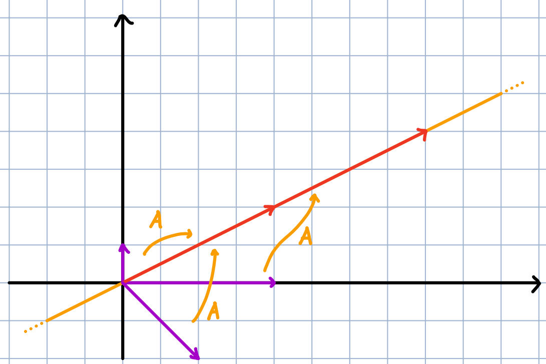
Kern

Wie gerade gesehen, beschreibt das Bild einer Matrix den Raum auf welchen beliebige Vektoren x durch A abgebildet werden.

$$A=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$



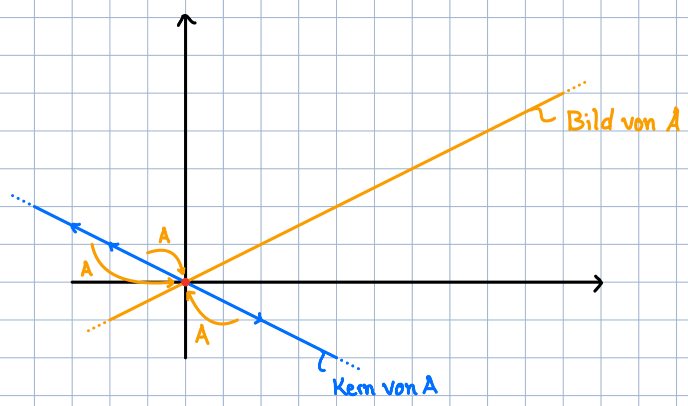
Wir fragen uns nun ob es Vektoren gibt die auf Null abgebildet werden.

D.h. wir suchen alle x, sodass $Ax=0$

$$A=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$



Mathematisch formuliert: $\boxed{\mathrm{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}}$

Bsp.: Bestimme den Kern von $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

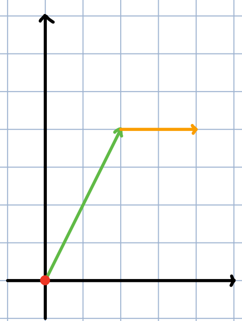
Löse das HLGS:

$$Ax = 0 \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x_2 = t \\ x_1 = -2t \end{array} \longrightarrow \mathrm{Kern}(A) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Zusammenhang mit LGS:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ Rang voll

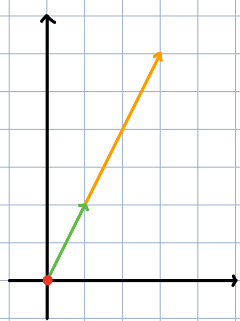
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ Rang nicht voll

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} x_2 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



uendlich viele Lösungen

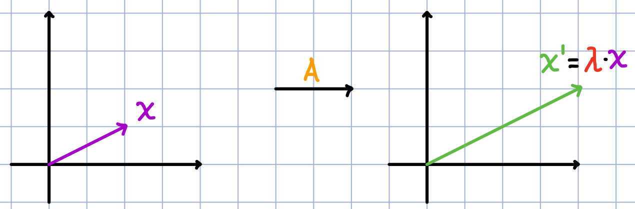
Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- A ist invertierbar / regulär
- $\det(A) \neq 0$
- Zeilen / Spalten sind linear unabhängig
- Spalten von A sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$
- Das Bild von A ist n-Dimensional
- Der Kern von A besteht nur aus dem Nullvektor

Zusammenhang mit Eigenvektoren/werten:

Recall: Wir fragen uns, ob es bestimmte Eingabevektoren x gibt, welche durch die Abbildung

$x \mapsto Ax$ nur um einen Faktor λ gestreckt bzw. gestaucht werden.



Wenn ein Eigenwert Null ist, dann gibt es Vektoren (die nicht der Nullvektor sind) die auf Null abgebildet werden. Dann ist der Rang von A nicht voll.

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

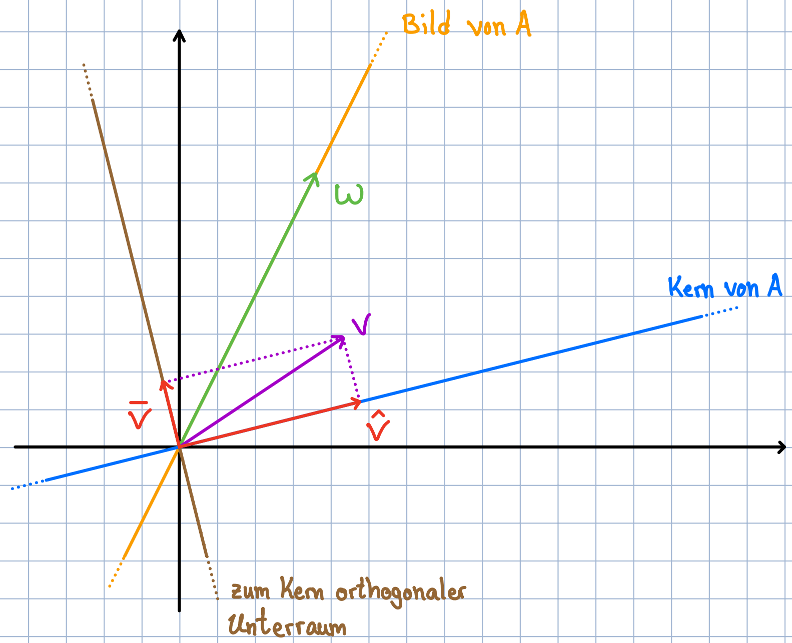
- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- A ist invertierbar/regulär
- $\det(A) \neq 0$
- Zeilen/Spalten sind linear unabhängig
- Spalten von A sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$
- Das Bild von A ist n-Dimensional
- Der Kern von A besteht nur aus dem Nullvektor
- Kein Eigenwert von A ist 0

Beziehung zwischen Kern und Bild

i.) $\dim(\text{Kern}) + \dim(\text{Bild}) = n$

Intuition in 2-D graphisch

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Ausserdem sei $Av = w$:



Wir Können nun v in zwei Komponenten zerlegen.

$\left.\begin{array}{l}\hat{v} \in \text{Kern}(A)\\ \bar{v} \text{ orthogonal zu } \hat{v}\end{array}\right\} v = \hat{v} + \bar{v}$

Dadurch:

$Av = A(\hat{v} + \bar{v}) = A\hat{v} + A\bar{v} = A\bar{v} = w$

i.) Der Kern und der zum Kern orthogonale Unterraum haben zusammen die Diemension n, da $v = \hat{v} + \bar{v}$

ii.) Jeder Vektor im zum Kern orthogonalen Unterraum Korrespondiert zu einem eindeutigen Vektor im Bild und umgekehrt, da $A\bar{v} = w$

Die Dimension vom zum Kern orthogonalen Unterraum ist also gleich der Dimension des Bildes.

Zusammen:

$$\dim(\text{Kern}) + \dim(\text{Bild}) = n$$

Mathematatisch:

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Der Kern von A ist die Lösungsmenge des HLGS $Ax=0$. Diese Lösungsmenge hat $n-r$ freie Parameter. Dabei ist r der Rang von A (Anzahl Pivots).

z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad x_3 = t,\ x_2 = -\frac{7}{5}t,\ x_1 = -\frac{6}{5}t$

$r = 2 \quad n = 3 \quad n-r = 1$

Der Lösungsraum von $Ax=0$ hat also die Dimension 1. Damit hat auch der Kern die Dimension 1.

$$\dim(\text{Kern } A) = n-r$$

Durch das Gaussverfahren zum lösen von $Ax=0$ haben wir die Zeilenstufenform R von A gefunden. Die Bilder von A und R lassen sich durch die jeweiligen Spalten beschreiben

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bild}(A) = \text{span}\{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}\} = \text{Bild}(R) = \text{span}\{r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}\}$$

Da A und R die selbe Lösungsmenge beschreiben, spannen sie auch den selben Raum auf. Dadurch haben sie die selbe Dimension.

Die Dimension von R ist einfach zu bestimmen da sie gleich dem Rang r ist.

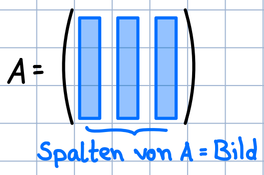
$$\dim(\text{Bild}(A)) = \dim(\text{Bild}(R)) = r$$

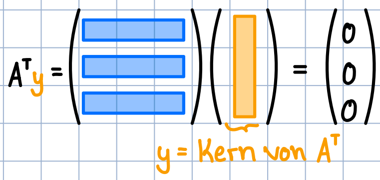
Dadurch ist $\quad \dim(\text{Kern } A) + \dim(\text{Bild } A) = n-r + r = n$

$$\dim(\text{Kern } A) + \dim(\text{Bild } A) = n$$

ii.) $\mathrm{Kern}(A^T) \perp \mathrm{Bild}(A)$

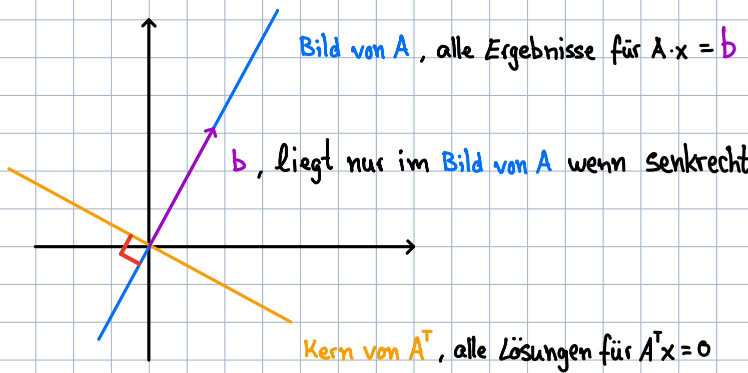
Intuition:





$\longrightarrow$ Skalarprodukte von Spaltenvektoren von A mit Kern von A^T sind 0!

"Graphisch:"



> Fredholm Alternative: $Ax = b$ ist lösbar (b liegt im Bild) genau dann, wenn b senkrecht auf allen Lösungen des adjungierten LGS $A^T \cdot y = 0$ steht.

Beispielaufgabe

1.) Sei

$$\mathcal{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x_1, x_2)^T \mapsto x_1 - x_2$$

Finden sie den Kern und das Bild von $\mathcal{F}$

i.) Abbildungsmatrix A finden:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 - x_2 \longrightarrow A = (1 \ \ -1)$$

ii.) $Ker(A)$:

$$(1 \ \ -1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow x_1 = x_2 \longrightarrow Ker(A) = \{ (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 ; x_1 = x_2 \}$$

$$= \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

iii.) $Bild(A) = Im(A) = \mathbb{R}$

$\longrightarrow$ Stimmen Dimensionen?

$n = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \dim(Ker(A)) = 1 \\ \dim(Im(A)) = 1 \end{array}\right\} \quad 1 + 1 = 2$$

Tipps zur Serie

1. - 5. MC Aufgaben

4.) Übungsunterlagen anschauen.

6.) Vorgehen wie in der Übung

7.) Mehr dazu nächste Woche: Überleg dir, worauf die Vektoren $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$ durch eine Multiplikation abgebildet werden. Wenn man eine Matrix mit $(1,0,0)^T$ multipliziert, ist das Ergebnis die erste Spalte von A. So könnt Ihr A konstruieren.

Graphisch überlegen!

8.) a.) Axiome prüfen

b.) Wie bei 7.a.)