Übung 06 (28.03.25)

Recap

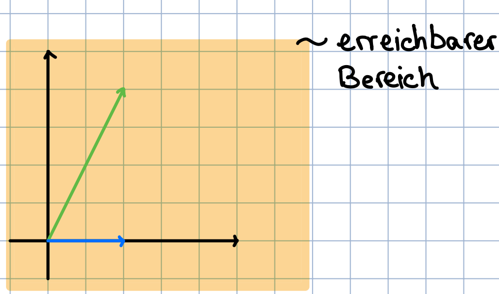
Bild:

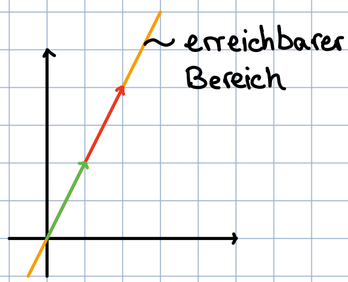
Ganz am Anfang von LinAlg I sahen wir die Matrix-Vektor-Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} x_3$$

Das heisst alle möglichen Vektoren die durch das Produkt Ax entstehen können, werden durch die Linearkombination der Spalten von A beschrieben. Zum Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$





$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} x_2$$

Dieser „erreichbare Bereich" nennt sich Bild einer Matrix. Die Diemension des Bildes ist der Rang.

Mathematisch formuliert:

$$\boxed{\mathrm{Bild}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ sodass } y = Ax \}} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

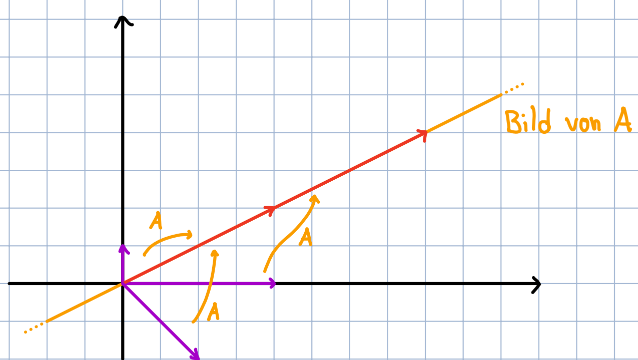
Kern:

Wie gerade gesehen, beschreibt das Bild einer Matrix den Raum auf welchen beliebige Vektoren x durch A abgebildet werden.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



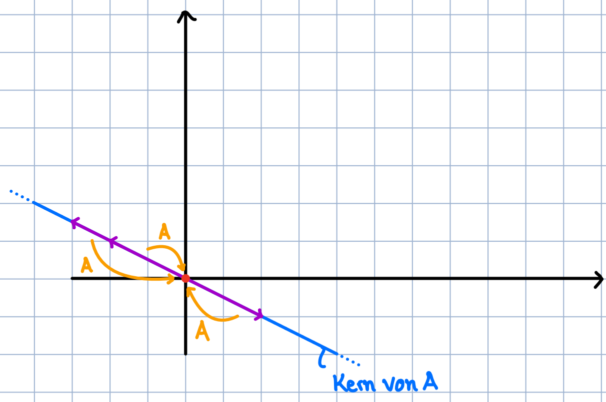
Wir fragen uns nun ob es Vektoren gibt die auf Null abgebildet werden.

D.h. wir suchen alle x, sodass $Ax=0$

$A=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$



Mathematisch formuliert: $\boxed{\mathrm{Kern}(A)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=0\}}$

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ **äquivalent**:

- A hat vollen Rang
- $Ax=b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax=b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax=0$ hat nur die triviale Lösung $(x=0)$
- A ist invertierbar / regulär
- $\det(A)\neq 0$
- Zeilen / Spalten sind linear unabhängig
- Spalten von A sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$
- Das Bild von A ist n-Dimensional
- Der Kern von A besteht nur aus dem Nullvektor
- Kein Eigenwert von A ist 0

Beziehung zwischen Kern und Bild:

i.) $\dim(\mathrm{Kern})+\dim(\mathrm{Bild})=n$

ii.) $\mathrm{Kern}(A^T)\perp \mathrm{Bild}(A)$

↳ Fredholm Alternative: $Ax=b$ ist lösbar (b liegt im Bild) genau dann, wenn b senkrecht auf allen Lösungen des adjungierten LGS $A^T\cdot y=0$ steht.

Basiswechsel

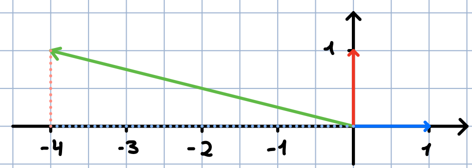
Basiswechsel für Vektoren:

Was bedeutet es nochmal wenn wir einen Vektor mit den Koordinaten $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ beschreiben?

Grundlegend beschreiben Koordinaten um wie viel die Basisvektoren des asoziierten Vektorraums skaliert werden.

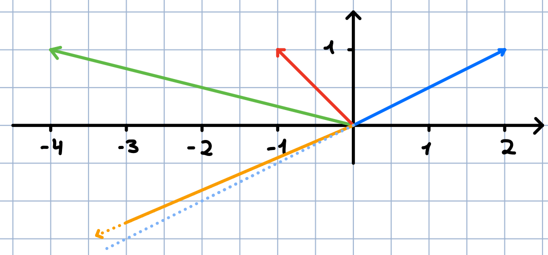
z.B. $\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}$ in der Standartbasis:

$$-4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}$$



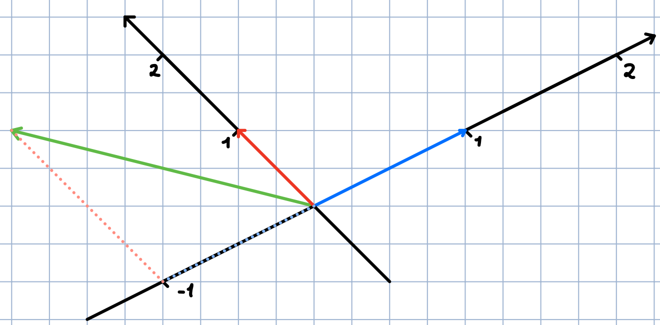
D.h. die Koordinaten hängen immer von den Basisvektoren ab! Würden wir z.B. die Basis mit Basisvektoren $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ wählen und die Koordinaten nicht ändern, würden wir einen anderen Vektor erhalten.

$$-4\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7\\-3\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}$$



Mit den neuen Basisvektoren wären die richtigen Koordinaten für den selben Vektor

$$-1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}$$



In der neuen Basis sind die Koordinaten also $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}_{Standart}$, $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}_{Neu}$ beschreiben gleichen punkt

Wenn wir also von einer Basis in eine andere wechseln, müssen wir auch die Koordinaten ändern.

Dafür führen wir das Konzept der Übergangsmatrix ein.

Nennen wir hierfür unsere Standartbasis $\mathfrak{B}=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ und die andere Basis $\mathfrak{B}'=\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}$. Wir wollen nun von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{B}'$ transformieren.

Wir suchen also die Koordinaten eines Vektors aus $\mathfrak{B}$ in der neuen Basis $\mathfrak{B}'$.

Mathematisch ausgedrückt $\quad x_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}}+x_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}}=\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}'}$

$\Downarrow$ Form eines LGS in Matrix - Schreibweise

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}}_{T_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}'}=\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}}\Leftrightarrow T_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}'}=\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}'}=T^{-1}_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}}\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}'}$$

Die Matrix $T_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}}$ transformiert einen Vektor aus der Basis $\mathfrak{B}'$ in die Basis $\mathfrak{B}$. Wir wollen jedoch die Transformation von $\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{B}'$. Dafür nehmen wir die Inverse

Unsere Übergangsmatrix ist also $T^{-1}_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}}=T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\end{bmatrix}$

<u>Zusammenfassend:</u>

Für beliebige Basen $Q=\{q_1,q_2,\dots,q_n\}$ und $W=\{w_1,w_2,\dots,w_n\}$ gilt:

$$\boxed{T_{Q\to W}=\left([q_1]_W,[q_2]_W,\dots,[q_n]_W\right)}$$

$$\boxed{[v]_W=T_{Q\to W}[v]_Q}$$

$$\boxed{T_{Q\to W}=T^{-1}_{W\to Q}}$$

<u>Bsp.:</u>

Eine Basis sei gegeben mit $\mathfrak{B}=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}_S,\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_S\right\}$.

Transformiere den Vektor $v=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}_S$ aus der Standardbasis S in $\mathfrak{B}$.

Wir suchen also $T_{S\to\mathfrak{B}}=\left([s_1]_{\mathfrak{B}},[s_2]_{\mathfrak{B}}\right)$.

$[s_i]_B$ kennen wir nicht. $[b_i]_S$ sind jedoch bekannt und somit auch $T_{B\to S}$.

$$T_{B\to S} = ([b_1]_S, [b_2]_S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

nun ist $T_{S\to B} = T^{-1}_{B\to S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$v_B = T_{S\to B}\, v_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}}}$$

Basiswechsel für Darstellungsmatrizen:

Wir können nun Vektoren von einer Basis in eine andere Transformieren. Nun stellt sich die Frage ob das auch für Matrizen gilt. Denn lineare Abbildungen und deren Darstellungsmatrizen sind auch an eine Basis gebunden.

Sei A eine Darstellungsmatrix einer lin. Abbildung in der Basis q. Dann gilt:

$$[A]_q [x]_q = [y]_q$$

wir suchen nun die Darstellungsmatrix der gleichen Abbildung in der Basis ω. Also:

$$[A]_\omega [x]_\omega = [y]_\omega$$

Durch umformen erhalten wir:

$$[A]_q [x]_q = [y]_q \qquad \Big| \cdot T_{Q\to W}$$

$$T_{Q\to W} [A]_q [x]_q = T_{Q\to W} [y]_q \qquad \Big| \; T_{Q\to W} [y]_q = [y]_\omega$$

$$T_{Q\to W} [A]_q [x]_q = [y]_\omega \qquad \Big| \; \mathbb{I} = T^{-1}_{Q\to W} T_{Q\to W}$$

$$T_{Q\to W} [A]_q T^{-1}_{Q\to W} T_{Q\to W} [x]_q = [y]_\omega \qquad \Big| \; T_{Q\to W} [x]_q = [x]_\omega$$

$$\underbrace{T_{Q\to W} [A]_q T^{-1}_{Q\to W}}_{[A]_\omega} [x]_\omega = [y]_\omega$$

$$\boxed{[A]_\omega = T_{Q\to W} [A]_q T^{-1}_{Q\to W}}$$

Bei einer genauen Betrachtung fällt folgendes auf:

$$[A]_\omega [x]_\omega = [y]_\omega$$

$$T_{Q\to W}\,[A]_q\,T^{-1}_{Q\to W}\,[x]_\omega = [y]_\omega$$

Transformation des Eingabevektor zu Basis q.

Abbildung in Basis q

Rücktransformation zu Basis ω

<u>Bsp.:</u>

Eine Basis sei gegeben mit $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}_S, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_S \right\}_S$.

Transformiere die Matrix $A = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}_S$ aus der Standardbasis S in $\mathcal{B}$.

$$[A]_\mathcal{B} = T_{S\to\mathcal{B}}\,[A]_S\,T^{-1}_{S\to\mathcal{B}}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}5 & 1\\ -6 & 0\end{pmatrix}}}$$

Diagonalisierung

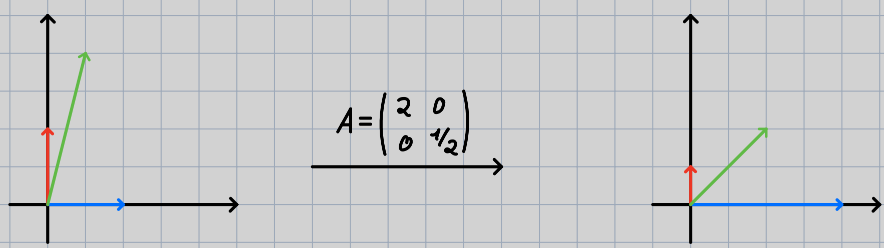
Wir wissen nun wie wir Basis wechseln können. Für Abbildungen ist es vorteihaft wenn die Abbildungsmatrix diagonal ist, da Diagonalmatrizen leicht invertierbar sind und Matrixmultiplikation einfacher ist. Beim Diagonalisieren wollen wir also einen Basiswechsel machen, so dass eine gewünschte Matrix diagonal wird.

Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ wollen wir also eine Matrix $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ finden, so dass:

$$T^{-1} A\, T = D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

D ist dann die Abbildung A in einer neuen Basis.

Recap: wie sehen Abbildungen von Diagonalmatrizen aus?



$$A = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$$

Basisvektoren werden nur um Skalare von der Diagonalen skaliert.

Welche Vektoren kennen wir bereists, welche bei einer Matrixmultiplikation nur skaliert werden und nicht ihre Richtung ändern? $\longrightarrow$ Eigenvektoren!

Für Diagonalmatrizen bedeutet das nichts andres als das die Basisvektoren die Eigenvektoren sind.

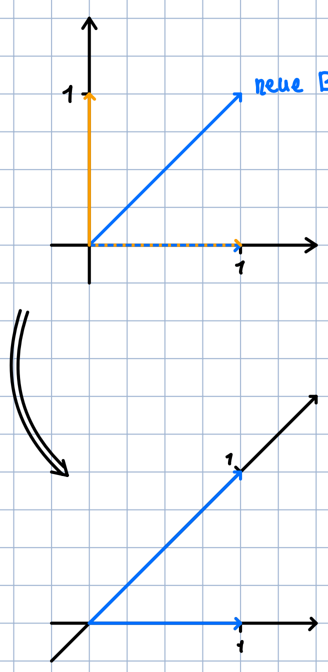
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte   Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Wir wählen also die Eigenvektoren der ursprünglichen Matrix als neue Basis. Dadurch garantieren wir, dass in der neuen Basis die Basisvektoren nur skaliert werden. Der Faktor mit welchem skaliert wird sind genau die Eigenwerte.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b = Standardbasis



EV: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

neue Basisvektoren für Basis b'

Übergangsmatrix $T_{b' \to b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

neue Basisvektoren in Basis b

$$D = T^{-1} A T \Leftrightarrow [D]_{b'} = T^{-1}_{b' \to b} [A]_b T_{b' \to b}$$

es gilt auch:

$$[A]_b = T_{b' \to b} [D]_{b'} T^{-1}_{b' \to b}$$

Die Übergangsmatrix T enthält also als Spalten die EV von A. Die Diagonalmatrix D muss nun auf der Diagonalen die EW von A haben. D.h. $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Als Kochrezept:

Matrix diagonalisieren (Basiswechsel in Eigenbasis)

1. Bestimme die Eigenwerte λ_i und die Eigenvektoren v_i
2. Die Matrix $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen.
3. Die Matrix $T = (v_1, \ldots, v_n)$ hat die Eigenvektoren als Spalten **(Gleiche Reihenfolge wie bei D!)**.
4. Bestimme T^{-1}. Falls EV orthonormal $T^{-1} = T^T$

Bedingung! T muss regulär (invertierbar) sein. Nächste Woche mehr dazu.

Beispielaufgabe

MC-Aufgaben aus alten Prüfungen:

3. Es seien die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Welcher der folgenden Vektoren ergänzt v_1, v_2 zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$?

(a) $(0,1,0)^t$.

(b) $(0,1,2)^t$.

(c) $(-1,1,0)^t$.

(d) $(0,0,0)^t$.

→ v_1 und v_2 haben keine x_1 Komponente. Also kann nur c richtig sein.

5. Was ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

(a) -6.

(b) 3.

(c) -2.

(d) 10.

→ $$\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$ extrahiert die zweite Spalte

$$\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3$$

wir müssen nur $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auswerten $\longrightarrow -6$

Matrix diagonalisieren (Basiswechsel in Eigenbasis)

1. Bestimme die Eigenwerte λ_i und die Eigenvektoren v_i
2. Die Matrix $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen.
3. Die Matrix $T = (v_1, \dots, v_n)$ hat die Eigenvektoren als Spalten **(Gleiche Reihenfolge wie bei D!)**.
4. Bestimme T^{-1}. Falls EV orthonormal $T^{-1} = T^T$

offene Aufgabe:

Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

Diagonalisieren sie A so dass gilt $D = T^{-1} A T$

i.) EW und EV

$$\longrightarrow \det(A - \lambda \mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 4 & -4 \\ 0 & 5-\lambda & -8 \\ 0 & 4 & -7-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-3-\lambda) \cdot \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -8 \\ 4 & -7-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-3-\lambda)[(5-\lambda)(-7-\lambda) + 32]$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda+3)^2$$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = -3 \qquad \lambda_3 = 1}$$

$\longrightarrow$ • $E_{\lambda_{1,2}} = E_{-3}$: $(A + 3\mathbb{I})x = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x_3 = x_2 = t \\ x_1 = s \end{array}$$

$$\boxed{E_{-3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

• $E_{\lambda_3} = E_1$: $(A - \mathbb{I})x = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x_3 = t \\ x_2 = 2t \\ x_1 = t \end{array}$$

$$\boxed{E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

ii.) $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

iii.) T EV als Spalten in gleicher Reihenfolge wie D!

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

iv.) T^{-1} ausrechnen.

Gauss-Jordan: $\boxed{T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$

Zum Überprüfen nachrechnen!

Tipps zur Serie

1.) MC

i.) Abbildungsmatrix bestimmen

ii.) EW und EV bestimmen.

2.) Auf Cheatsheet Eigenschaften von symmetrischen Matrizen beachten.

Orthogonalisierungsverfahren

3.) Nur diagonalisierbar wenn T regulär $\Leftrightarrow$ Spalten von T lin. unabh. $\Leftrightarrow$

4.) "Freizeitaufgabe"