Übung 07 (04.04.25)

Recap

Basiswechsel für Vektoren:

Koordinaten beschreiben um wie viel die Basisvektoren des assoziierten Vektorraums skaliert werden. D.h. die Koordinaten hängen immer von den Basisvektoren ab! Wenn wir also von einer Basis in eine andere wechseln, müssen wir auch die Koordinaten ändern. Dafür führen wir das Konzept der Übergangsmatrix ein.

Nennen wir hierfür unsere Standartbasis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ und die andere Basis $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Wir wollen nun von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ transformieren.

Wir suchen also die Koordinaten eines Vektors aus $\mathcal{B}$ in der neuen Basis $\mathcal{B}'$.

Mathematisch ausgedrückt

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \Rightarrow T_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = T^{-1}_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Die Matrix $T_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$ transformiert einen Vektor aus der Basis $\mathcal{B}'$ in die Basis $\mathcal{B}$. Wir wollen jedoch die Transformation von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{B}'$. Dafür nehmen wir einfach die Inverse.

Allgemein gilt für beliebige Basen $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ und $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$

$$\boxed{T_{Q \to W} = \left([q_1]_W, [q_2]_W, \dots, [q_n]_W \right)}$$

$$\boxed{[v]_W = T_{Q \to W} [v]_Q}$$

$$\boxed{T_{Q \to W} = T^{-1}_{W \to Q}}$$

Basiswechsel für Darstellungsmatrizen:

Sei A eine Darstellungsmatrix einer lin. Abbildung in der Basis q. Dann gilt:

$$[A]_q [x]_q = [y]_q$$

wir suchen nun die Darstellungsmatrix der gleichen Abbildung in der Basis ω. Also:

$$[A]_\omega [x]_\omega = [y]_\omega$$

Durch umformen erhalten wir:

$$\boxed{[A]_\omega = T_{Q\to W} [A]_q T^{-1}_{Q\to W}}$$

Bei einer genauen Betrachtung fällt folgendes auf:

$$[A]_\omega [x]_\omega = [y]_\omega$$

$$T_{Q\to W} [A]_q T^{-1}_{Q\to W} [x]_\omega = [y]_\omega$$

Transformation des Eingabevektor zu Basis q.

Abbildung in Basis q

Rücktransformation zu Basis ω

Diagonalisierung:

Für Abbildungen ist es vorteihaft wenn die Abbildungsmatrix diagonal ist, da Diagonalmatrizen leicht invertierbar sind und Matrixmultiplikation einfacher ist. Beim Diagonalisieren wollen wir also einen Basiswechsel machen, so dass die Matrix in der neuen Basis diagonal ist.

Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ wollen wir also eine Matrix $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ finden, so dass:

$$T^{-1} A T = D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

D ist dann die Abbildung A in einer neuen Basis.

Bei Diagonalmatrizen werden Basisvektoren nur um Skalare von der Diagonalen skaliert. D.h. die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Wir wählen also die Eigenvektoren der ursprünglichen Matrix als neue Basis. Der Faktor mit welchem skaliert wird sind genau die Eigenwerte.

Die Übergangsmatrix T enthält dann als Spalten die EV von A. Die Diagonalmatrix D muss nun auf der Diagonalen die EW von A haben. D.h. $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Bedingung! T muss regulär (invertierbar) sein.

Diagonalisierung contd.

Wann ist eine Matrix diagonalisierbar?

Da wir für eine Diagonalisierung $T^{-1}AT = D$, T^{-1} brauchen muss T regulär sein.

Auf eurer Zusammenfassung steht aber:

6.6 Diagonalisierbarkeit

Eine quadratische Matrix A heisst diagonalisierbar, falls eine reguläre Matrix T existiert, sodass $D = T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

$\boxed{A \text{ halbeinfach} \iff A \text{ diagonalisierbar}}$

Was bedeutet es für eine Matrix wenn sie halbeinfach ist?

$\boxed{\text{Eine Matrix } A \text{ ist halbeinfach wenn jedes } \lambda \text{ alg Vfh.} = \text{g. Vfh.}}$

In anderen Worten: Jeder EW λ_i (mit Vfh. gezählt) hat einen EV welcher linear unabhänig von allen anderen EV ist. Deshalb gilt auch:

Eigenbasis: Die Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bilden einen Basis für $\mathbb{C}^n \iff$ die Matrix ist halbeinfach.

Recall:

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A ist invertierbar / regulär
- Zeilen / Spalten sind linear unabhänig
- Spalten von A sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$

Dadurch, dass A halbeinfach ist garantieren wir dass T regulär ist und somit ist A diagonalisierbar.

Bsp:

Halbeinfache Matrix: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

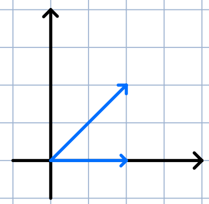
$$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)$$

alg. Vfh. = 1 gVfh. = 1

$\lambda_1 = 2 \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1 \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

alg. Vfh. = 1 gVfh. = 1



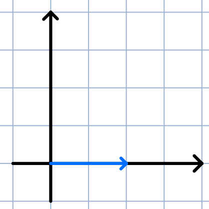
Eigenvektoren bilden Basis

nicht halbeinfache Matrix: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det(B - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1$$

$$= (2-\lambda)^2 \longrightarrow \lambda_{1,2} = 2 \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alg. Vfh. = 2 gVfh. = 1



Eigenvektor bildet keine Basis

Spezialfall: Symmetrische Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch dann gilt:

- A ist halbeinfach, also diagonalisierbar
- A besitzt eine orthonormale Eigenbasis
- $\exists$ eine orthogonale Matrix T so dass, $T^{-1} A T = T^T A T$ diagonal ist.

Anwendung: Potenzen von Matrizen

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar. Berechne A^3

Da A diagonalisierbar ist gilt: $A = T D T^{-1}$

Nun ist $A^3 = A \cdot A \cdot A = (TD\underbrace{T^{-1})(T}_{I}D\underbrace{T^{-1})(T}_{I}DT^{-1}) = TD^3T^{-1} = T \operatorname{diag}(\lambda_1^3, \ldots, \lambda_n^3)\, T^{-1}$

Generell gilt $\boxed{A^k = T \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)\, T^{-1}}$

Dadurch vereinfacht sich auch das Matrixexponential $\boxed{e^A = T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})\, T^{-1}}$

↳ durch einsetzen in $e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$

Quadratische Formen

Quadratische Gleichungen sind schon seit der Schule bekannt. Sie haben die allgemeine Form:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Diese quadratische Gleichung hat nur eine Variable. Wie ihr in der Analysis schon gesehen habt, können Gleichungen auch mehrere Variablen $x_1, \dots, x_n$ haben. Dadurch kann es auch quadratische Funktionen in mehreren Variablen geben. Z.B. in zwei Variabeln.

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

Bei genauerer Betrachtung sieht man, dass diese Funktion auch mit einer Matrix beschrieben werden kann

$$q(x_1, x_2) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Hier ist nun $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ die quadratische Form von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Allgemein können wir für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die dazugehörige quadratische Form finden. Sie ist wie folgt definiert: $x \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\begin{aligned} q_A &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}}$$

Die Koeffizienten a_{ij} lassen sich für 2 bzw. 3 Variabeln wie folgt finden:

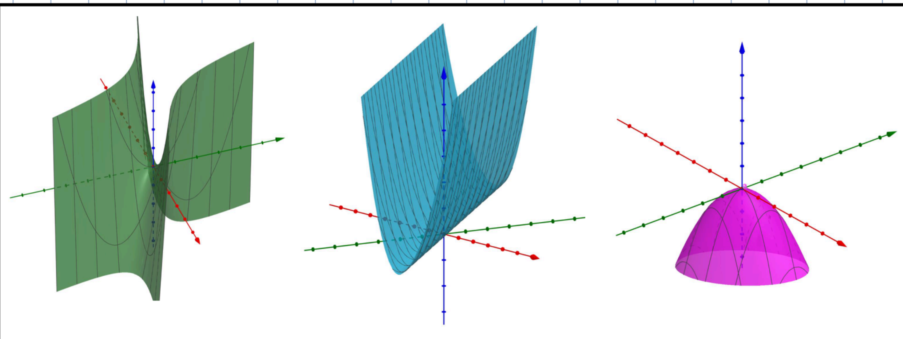
$\underline{\mathbb{R}^2}$:

$$q_A(\underline{x}) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ax_1^2 + 2dx_1x_2 + bx_2^2$$

$\underline{\mathbb{R}^3}$:

$$q_A(\underline{x}) = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2dx_1x_2 + 2ex_1x_3 + 2fx_2x_3$$

Je nach Matrix kann die quadratische Form graphisch anders aussehen. Bsp. für 2 Variabeln.



$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ $\quad$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ $\quad$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow -x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2^2$

Definitheit:

Die unterschiedlichen quadratischen Formen lassen sich klassifizieren.

10.2 Definitheit einer quadratischen Form

Eine quadratische Form heisst:

- positiv definit: $q(x) > 0 \; \forall x \neq 0$
- negativ definit: $q(x) < 0 \; \forall x \neq 0$
- positiv semidefinit: $q(x) \geqslant 0 \; \forall x \neq 0$
- negativ semidefinit: $q(x) \leqslant 0 \; \forall x \neq 0$
- indefinit: sonst

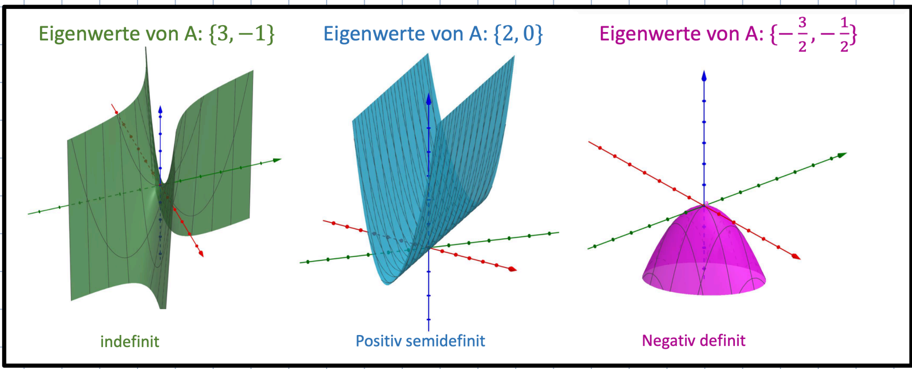
Um die Definitheit einer quadratische Form zu bestimmen, bestimme man die Definitheit der zugehörigen symmetrischen Matrix A

10.3 Definitheit einer symmetrischen Matrix

Variante 1: Bestimmung der Eigenwerte

Die erste Möglichkeit ist, die Definitheit durch die Eigenwerte zu bestimmen. Eine symmetrische Matrix heisst:

- positiv definit: Alle $\lambda > 0$
- negativ definit: Alle $\lambda < 0$
- positiv semidefinit: Alle $\lambda \geqslant 0$
- negativ semidefinit: Alle $\lambda \leqslant 0$
- indefinit: sonst

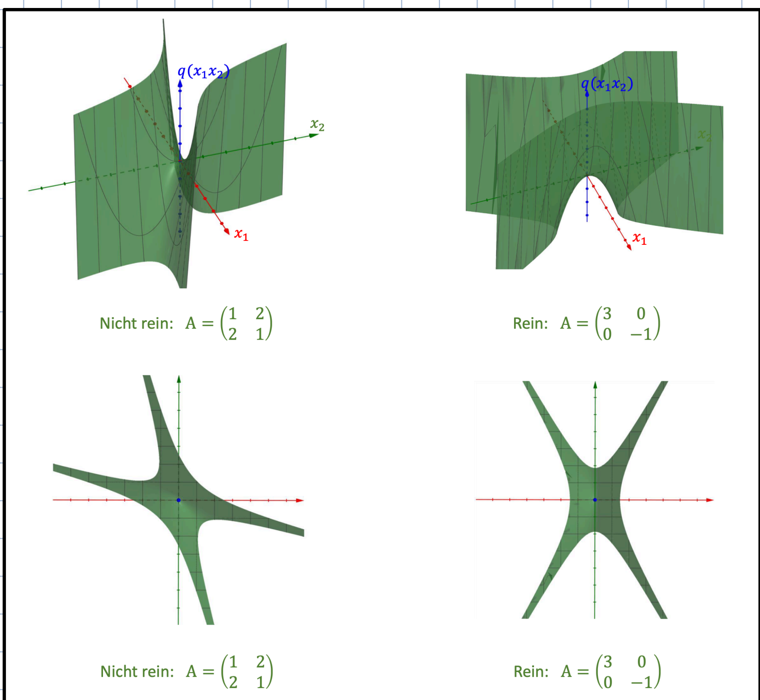


Reine quadratische Form:

Eine rein quadratische Form hat keine Mischterme. D.h. sie wird mit einer Diagonalmatrix gebildet:

$$q(x_1, x_2) = (x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1^2 - x_2^2$$

Was ist der Unterschied zu einer nicht quadratischen Form?



Es scheint als ob beide Formen die selbe Fläche beschreiben, bloss sind sie rotiert. Durch eine Transformation können wir nun die nicht reine Form in eine reine Form umwandeln.

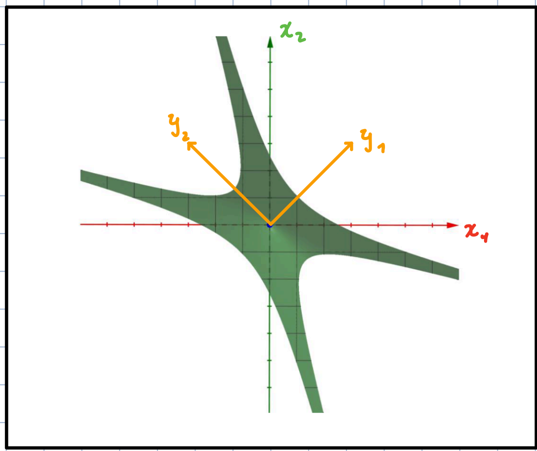
Dafür nehmen wir die EV der Matrix A und wählen sie als neue Basis

z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit EV: } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wenn wir die EV als Basis nehmen, wird die quadratische Form rein.

$$(y_1 \; y_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$



Dieses Verfahren werden wir nächste Woche noch genauer betrachten. (Hauptachsentransformation)

Beispielaufgabe

MC-Aufgaben aus alten Prüfungen:

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Mengen ist *kein* Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$?

(a) $\ker(A)$.

(b) $\mathrm{Im}(A)$.

(c) $\{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$.

(d) $\{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$.

→ Reminder:

4.2 Definition Unterraum

Eine nichtleere Teilmenge eines Vektorraums V heisst Unterraum von V, falls:

1. $\forall a, b \in U :$ $\quad a \oplus b \in U$
2. $\forall a \in U, \forall \alpha \in \mathbb{K} :$ $\quad \alpha \odot a \in U$

- Ein Unterraum ist selber ein Vektorraum.
- Ein Unterraum **muss den Nullvektor enthalten!**

Prüfe ob Mengen den Nullvektor enthalten!

A hat hier vollen Rang, d.h. $Ax = 0$ und damit Ker(A) enthalten den Nullvektor.

Im(A) enthält auch den Nullvektor da Ker(A) existiert.

Es bleibt nur $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ übrig. Dieses LGS hat nur eine eindeutige Lösung welche $\neq 0$ ist. Somit ist c.) kein UR

6. Es seien die Basen

$$\mathcal{B} = (4x, 2x^2 - 4x + 1, 3x^2 + 3x + 1) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}' = (x^2, x, 1)$$

von $\mathcal{P}_2$ gegeben, wobei $\mathcal{P}_2$ den reellen Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich zwei bezeichnet. Welche der folgenden Matrizen entspricht der Übergangsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$?

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

→ Reminder:

$$\boxed{T_{Q\to W} = ([q_1]_W, [q_2]_W, \dots, [q_n]_W)}$$

Wir suchen $T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = ([b_1]_{\mathcal{B}'}, [b_2]_{\mathcal{B}'}, [b_3]_{\mathcal{B}'})$

$[b_1]_{\mathcal{B}'}: \quad 4x = a x^2 + b x + c \cdot 1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$[b_2]_{\mathcal{B}'}: \quad 2x^2 - 4x + 1 = a x^2 + b x + c \cdot 1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$[b_3]_{\mathcal{B}'}: \quad 3x^2 - 3x + 1 = a x^2 + b x + c \cdot 1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gegeben sei die Quadratische Form: $q(x) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$

a.) Bestimmen Sie die symmetrische Matrix A, sodass $q(x) = x^T A x$

$$q_A(\underline{x}) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a x_1^2 + 2d x_1 x_2 + b x_2^2$$

$a = 2$, $b = 1$, $d = 4$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

b.) Bestimmen Sie die Definitheit der quadratischen Form von A:

i.) EW bestimmen:

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 16 = 0$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda - 14 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+56}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{65}}{2} \longrightarrow \text{indefinit}$$

10.2 Definitheit einer quadratischen Form

Eine quadratische Form heisst:

- positiv definit: $q(x) > 0\ \forall x \neq 0$
- negativ definit: $q(x) < 0\ \forall x \neq 0$
- positiv semidefinit: $q(x) \geqslant 0\ \forall x \neq 0$
- negativ semidefinit: $q(x) \leqslant 0\ \forall x \neq 0$
- indefinit: sonst

Um die Definitheit einer quadratische Form zu bestimmen, bestimme man die Definitheit der zugehörigen symmetrischen Matrix A

10.3 Definitheit einer symmetrischen Matrix

Variante 1: Bestimmung der Eigenwerte

Die erste Möglichkeit ist, die Definitheit durch die Eigenwerte zu bestimmen. Eine symmetrische Matrix heisst:

- positiv definit: Alle $\lambda > 0$
- negativ definit: Alle $\lambda < 0$
- positiv semidefinit: Alle $\lambda \geqslant 0$
- negativ semidefinit: Alle $\lambda \leqslant 0$
- indefinit: sonst

Tipps zur Serie

MC-Aufgaben: Generell keine Tipps

3.) Hauptachsentransformation kommt nächste Woche in der Übung.

6.)

a.) mit Formel aus Übungsstunde

b.) Kochrezept von ZF. (Hauptachsentransformation kommt nächste Woche in der Übung)

c.) z.B. mit EW, wie in Übung.

d.) Sehr schwer

Tipp: $B+B^T$ ist symmetrisch

7.) Kochrezept (sehr wichtig), Prüfungsrelevant.

Hauptachsentransformation kommt nächste Woche in der Übung.

8.) Kritische Punkte von 2-D Funktion → Gradient $=0$

Bestimmen ob max. oder min, siehe Cheatsheet.

Nicht besonders relevant.