Übung 07 (11.04.25)

Recap

Halbeinfache Matrizen:

Wann ist eine Matrix diagonalisierbar?

6.6 Diagonalisierbarkeit

Eine quadratische Matrix A heisst diagonalisierbar, falls eine reguläre Matrix T existiert, sodass $D = T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

A halbeinfach $\Longleftrightarrow$ A diagonalisierbar

Was bedeutet es für eine Matrix wenn sie halbeinfach ist?

Eine Matrix A ist halbeinfach wenn jedes λ alg Vfh. = g. Vfh.

In anderen Worten: Jeder EW λ_i (mit Vfh. gezählt) hat einen EV welcher linear unabhängig von allen anderen EV ist. Deshalb gilt auch:

Eigenbasis: Die Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bilden einen Basis für $\mathbb{C}^n$ $\Longleftrightarrow$ die Matrix ist halbeinfach.

Dadurch, dass A halbeinfach ist garantieren wir dass T regulär ist und somit ist A diagonalisierbar.

Spezialfall: Symmetrische Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch dann gilt:

- A ist halbeinfach, also diagonalisierbar
- A besitzt eine orthonormale Eigenbasis
- $\exists$ eine orthogonale Matrix T so dass, $T^{-1}AT = T^{T}AT$ diagonal ist.

Potenzen von Matrizen

Generell gilt $\boxed{A^k = T \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) T^{-1}}$

Dadurch vereinfacht sich auch das Matrixexponential $\boxed{e^A = T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) T^{-1}}$

↳ durch einsetzen in $e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$

Quadratische Formen:

Es gibt quadratische Funktionen in mehreren Variablen. Z.B. in zwei Variabeln.

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

Bei genauer Betrachtung sieht man, dass diese Funktion auch mit einer Matrix beschrieben werden kann

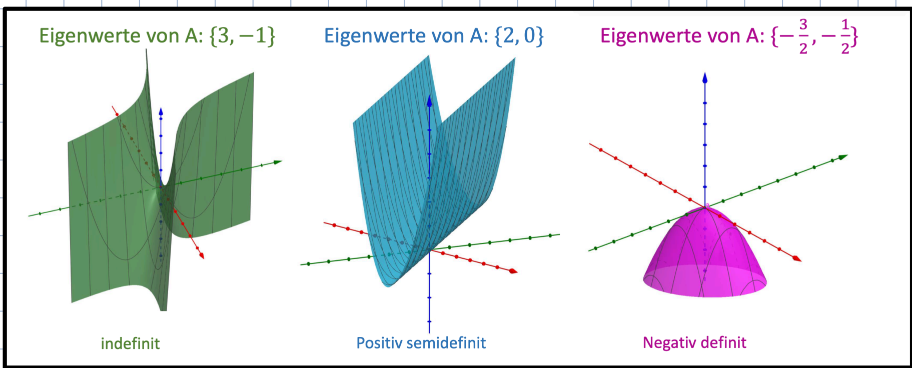
$$q(x_1, x_2) = (x_1 \ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Hier ist nun $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ die quadratische Form von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Allgemein können wir für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die dazugehörige quadratische Form finden. Sie ist wie folgt definiert: $x \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\begin{aligned} q_A &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}}$$

Je nach Matrix kann die quadratische Form graphisch anders aussehen. Bsp. für 2 Variabeln.



Die unterschiedlichen quadratischen Formen lassen sich klassifizieren.

10.2 Definitheit einer quadratischen Form

Eine quadratische Form heisst:

- positiv definit: $q(x) > 0 \ \forall x \neq 0$
- negativ definit: $q(x) < 0 \ \forall x \neq 0$
- positiv semidefinit: $q(x) \geqslant 0 \ \forall x \neq 0$
- negativ semidefinit: $q(x) \leqslant 0 \ \forall x \neq 0$
- indefinit: sonst

Um die Definitheit einer quadratische Form zu bestimmen, bestimme man die Definitheit der zugehörigen symmetrischen Matrix A

10.3 Definitheit einer symmetrischen Matrix

Variante 1: Bestimmung der Eigenwerte

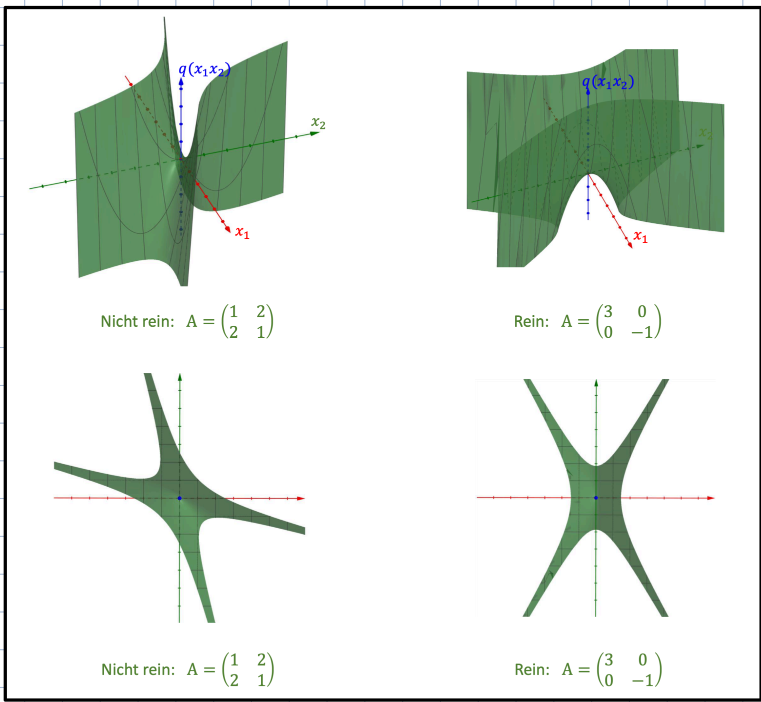
Die erste Möglichkeit ist, die Definitheit durch die Eigenwerte zu bestimmen. Eine symmetrische Matrix heisst:

- positiv definit: Alle $\lambda > 0$
- negativ definit: Alle $\lambda < 0$
- positiv semidefinit: Alle $\lambda \geqslant 0$
- negativ semidefinit: Alle $\lambda \leqslant 0$
- indefinit: sonst

Eine rein quadratische Form hat keine Mischterme. D.h. sie wird mit einer Diagonalmatrix gebildet:

$$q(x_1, x_2) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1^2 - x_2^2$$

Was ist der Unterschied zu einer nicht quadratischen Form?

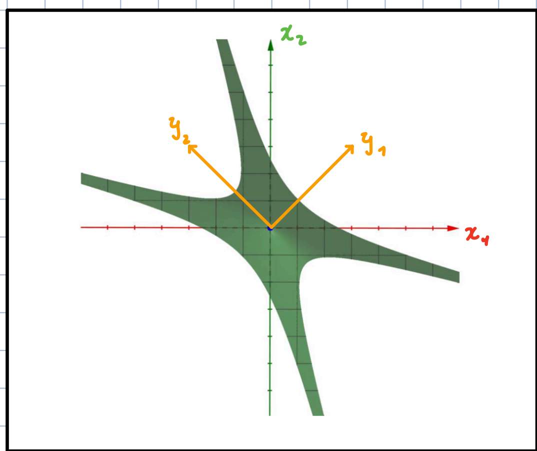


Es scheint als ob beide Formen die selbe Fläche beschreiben, bloss sind sie rotiert. Durch eine Transformation können wir nun die nicht reine Form in eine reine Form umwandeln.

Dafür nehmen wir die EV der Matrix A und wählen sie als neue Basis

z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit EV: } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Wenn wir die EV als Basis nehmen, wird die quadratische Form rein.

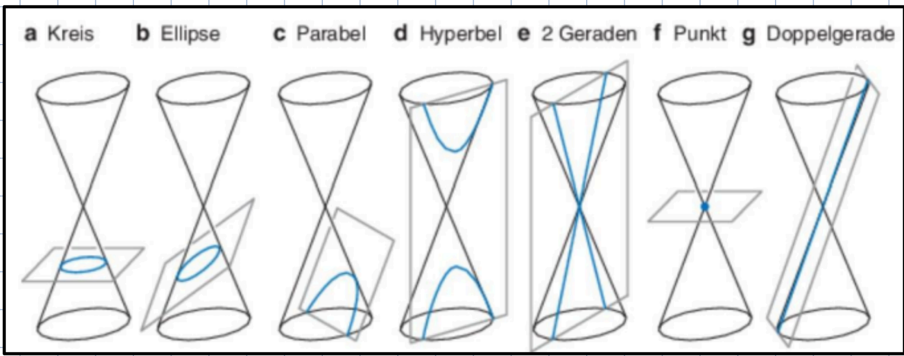
$$(y_1\ y_2)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Quadratische Formen cont.

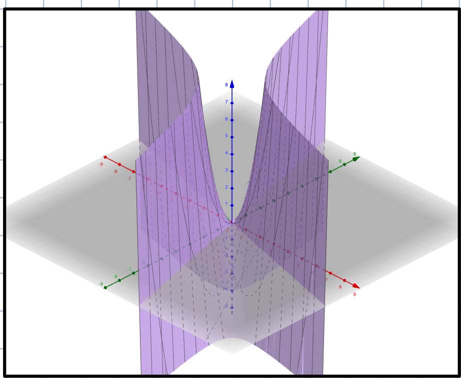
Sei eine quadratische Form q_A für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch. Dann ist die Niveaumenge

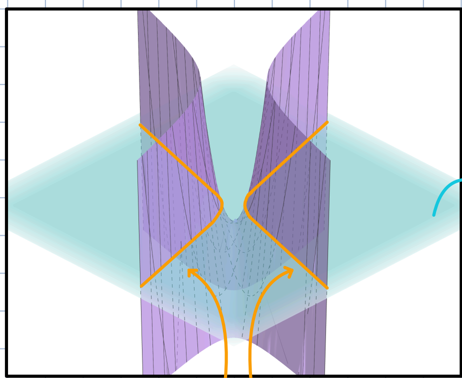
$$\{x \in \mathbb{R}^2 : q_A(x) = 1\}$$

ein ____. Verschiedene symmetrische Matrizen liefern einen dieser Kegelschnitte.



Z.B. die uns schon bekannte quadratische Form $q_A = (x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$:





Wenn die Matrix A ____ ist, dann sind die Koordinatenachsen ____ mit den Hauptachsen des Kegelschnitts. Ein Kegelschnitt im Hauptachsensystem können wir in ____ bringen.

Die Normalformen aller Kegelschnitte sind:

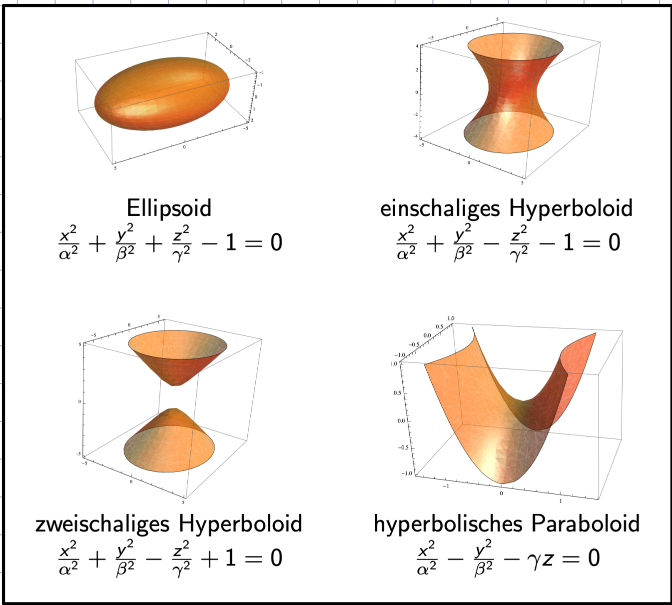
Rang$(A) = 2$:	
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$	Ellipse/Kreis
$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$	Hyperbel
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + 1 = 0$	leere Menge
$x^2 + \beta^2 y^2 = 0$	Punkt
$x^2 - \beta^2 y^2 = 0$	sich schneidendes Geradenpaar
Rang$(A) = 1$:	
$x^2 - \gamma y = 0$	Parabel
$x^2 - \alpha^2 = 0$	paralleles Geradenpaar
$x^2 + \alpha^2 = 0$	leere Menge
$x^2 = 0$	Gerade

wobei α, β, γ alle $\neq 0$.

Sei eine quadratische Form q_A für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch. Dann ist die Niveaumenge

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : q_A(x) = 1\}$$

eine oder Fläche 2. Grades. Verschiedene quadratische Formen liefern verschiedene Quadriken in ihrem Hauptachsensystem. Hier einige ausgewählte Beispiele:



Ellipsoid
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0$

einschaliges Hyperboloid
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0$

zweischaliges Hyperboloid
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} + 1 = 0$

hyperbolisches Paraboloid
$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \gamma z = 0$

Wie bringen wir nun eine quadratische Form in die entsprechenden Normalformen?

Hauptachsentransformation

Einfache Antwort: Zusammenfassung!

Aber was machen wir genau wenn wir eine quadratische Form in Normalform bringen

22. [**10 Punkte**] Gegeben sei die quadratische Form

$$q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto q(x) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2.$$

a) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie die symmetrische Matrix A, sodass $q(x) = x^\top Ax$ ist.

b) [**6 Punkte**] Ein Kegelschnitt Q ist gegeben durch

$$q(x) + a^\top x = 0, \text{ wobei } a^\top = (6, -6).$$

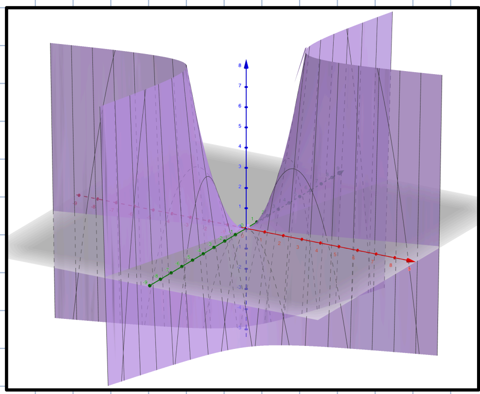
Bringen Sie den Kegelschnitt durch eine Hauptachsentransformation $x = Ty$ und eine Translation auf Normalform, und geben Sie dabei auch T explizit an.

c) [**2 Punkte**] Ist die quadratische Form q positiv definit, negativ definit oder indefinit? Begründen Sie Ihre Antwort.

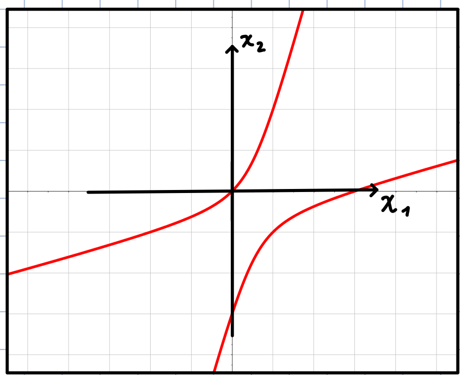
BPW 18

Im Grunde müssen wir eine und machen. Betrachten wir das Ganze an dem Beispiel.

Die quadratische Form $q(x) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$ sieht im 3-D Raum wie folgt aus:

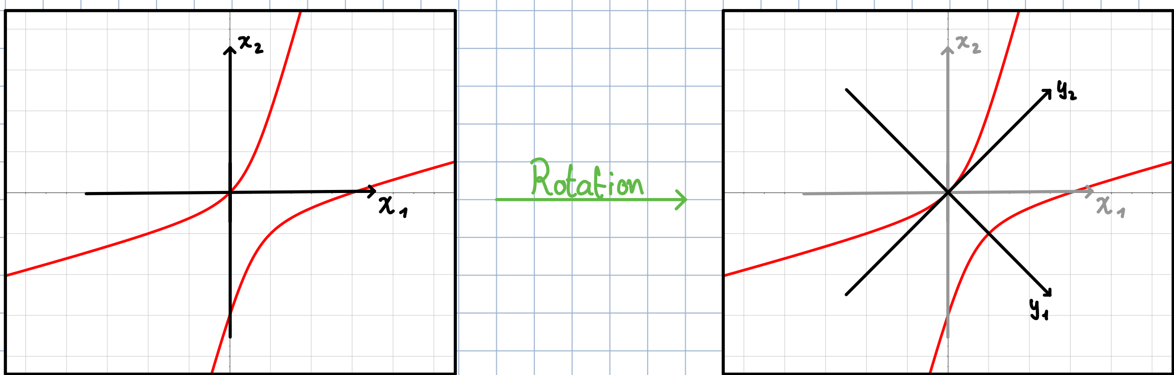


Der Kegelschnitt Q beschreibt die Schnittmenge von $q(x)$ mit einer Ebene. Diesen Kegelschnitt können wir in 2-D gut visualisieren.



$Q(x): -x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 + 6x_1 - 6x_2 = 0$

Zuerst ______ wir den Kegelschnitt damit die Hauptachsen mit den Koordinatenachsen übereinstimmen / parallel sind.



Durch einen Basiswechsel $x = Ty$ sind unsere neuen Basisvektoren parallel zu den Hauptachsen. In dieser Basis y ist die Matrix A diagonal da wir im Hauptachsensystem sind.

Wir müssen also A diagonalisieren um T zu finden.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (\quad\quad)(\quad\quad) \longrightarrow \lambda_1 = \quad, \quad \lambda_2 = \quad$$

$$E_{\lambda_1}: \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x_2 = \\ x_1 = \end{array} \quad v_1 = \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}$$

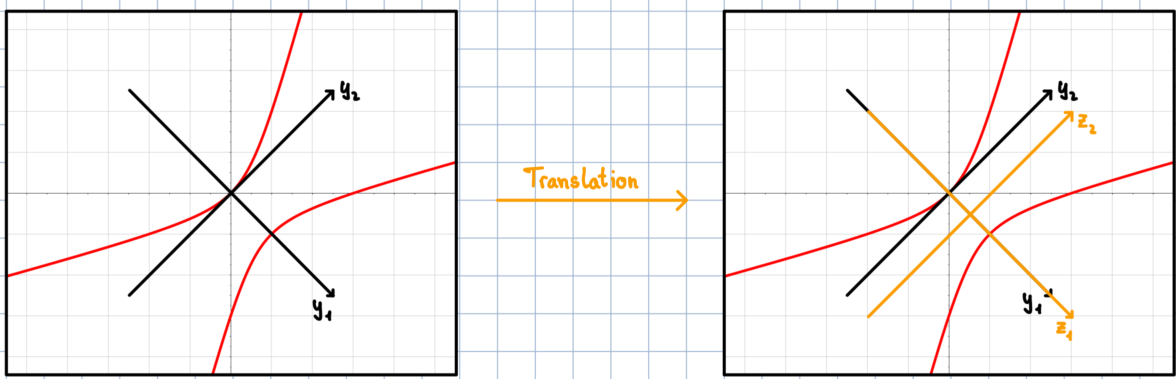
$$E_{\lambda_2}: \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x_2 = \\ x_1 = \end{array} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \; & \; \end{pmatrix}$$ (orthogonale Matrix wählen damit keine Streckung)

Nun können wir auch die quadratische Form und den Kegelschnitt in der neuen Basis ausdrücken.

$$q(x) + a^T x \overset{x = Ty}{=\!=} q(Ty) + a^T Ty = \underbrace{(Ty)^T A (Ty)}_{y^T T^T A T y \,=\, y^T D y} + a^T Ty = -3y_1^2 + y_2^2 + 6\sqrt{2}\, y_1 = 0$$

Um die Normalform zu erhalten müssen wir noch den , das entspricht einer



Dafür ergänzen wir quadratisch

$$\begin{aligned} 0 &= -3y_1^2 + y_2^2 + 6\sqrt{2}\, y_1 \\ &= -3(y_1^2 - 2\sqrt{2}\, y_1) + y_2^2 \\ &= -3((y_1 - \sqrt{2})^2 + 2) + y_2^2 \\ &= -3(y_1 - \sqrt{2})^2 + y_2^2 + 6 \end{aligned}$$

Nun können wir eine Translation durchführen mit . Der Vektor korrigiert in unserem Beispiel die Verschiebung in y_1 um $\sqrt{2}$. Der Vektor c ist demnach:

$$z = y + c = y + \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix} \qquad \text{d.h.} \quad \begin{array}{l} y_1 - \sqrt{2} = z_1 \\ y_2 = z_2 \end{array}$$

Die Normalform ist schliesslich:

$$0 = -3(y_1 - \sqrt{2})^2 + y_2^2 + 6$$

$$0 = -3z_1^2 + z_2^2 + 6$$

$$3z_1^2 - z_2^2 = 6$$

$$\boxed{\frac{\quad}{\quad} \;=\;}$$

Die Normalform ist viel einfacher zu interpretieren als die originale form:

$$Q(x): \quad -x_1^2+4x_1x_2-x_2^2+6x_1-6x_2=0$$

$$-3y_1^2+y_2^2+6\sqrt{2}\,y_1=0$$

$$\frac{z_1^2}{2}-\frac{z_2^2}{6}=1$$

Rang$(A)=2$:

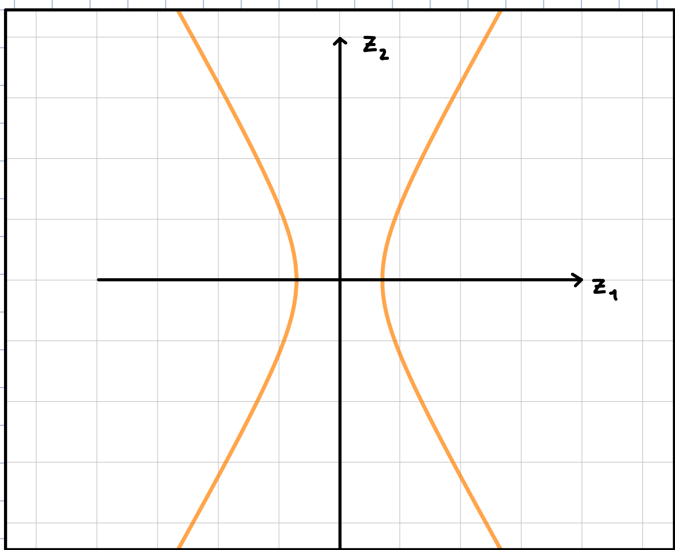
$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-1=0$	Ellipse/Kreis
$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}-1=0$	Hyperbel
$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+1=0$	leere Menge
$x^2+\beta^2y^2=0$	Punkt
$x^2-\beta^2y^2=0$	sich schneidendes Geradenpaar

Rang$(A)=1$:

$x^2-\gamma y=0$	Parabel
$x^2-\alpha^2=0$	paralleles Geradenpaar
$x^2+\alpha^2=0$	leere Menge
$x^2=0$	Gerade

wobei α,β,γ alle $\neq 0$.

$$\boxed{\frac{z_1^2}{2}-\frac{z_2^2}{6}=1}$$



Beispielaufgaben

1.) MC

Welcher der folgenden Vektoren ***ist*** ein Eigenvektor der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2.) Prüfungsaufgabe: BP W14

4. Sei
$$q(x) = x_1^2 + \sqrt{2} \cdot 4x_1x_2 + 3x_2^2$$
eine quadratische Form mit $x = (x_1, x_2)^\top$.

a) **[1 Punkt]** Bestimmen Sie eine symmetrische, reelle Matrix A, so dass $q(x) = x^\top Ax$ gilt.

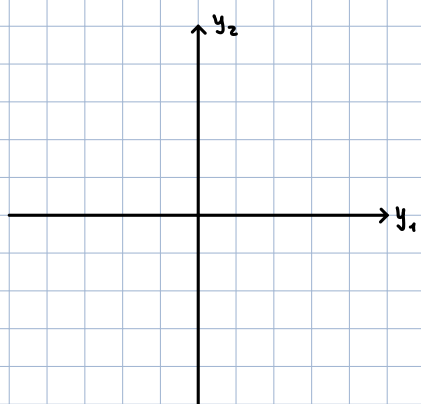
b) **[6 Punkte]** Führen Sie die Hauptachsentransformation $y = Tx$ durch.

c) **[3 Punkte]** Skizzieren Sie die Menge $Q = \{x \,|\, q(x) = 0\}$ im y-Koordinatensystem der Hauptachsen.

a.)

b.) $y = Tx$ und $x = T^{-1}y \Rightarrow x = Sy$

c.)

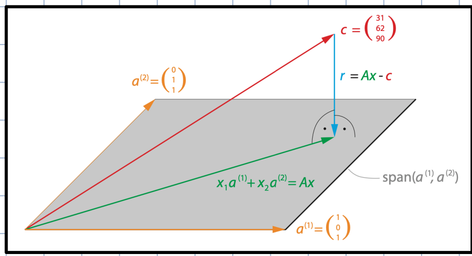


Tipps zur Serie

1.) MC

Nächste Woche in der Übung

Abbildung als Hilfe.



5.) Siehe Anleitung Cheatsheet. Nächste Woche in der Übung