Übung 09 (02.05.25)

Recap

Sei eine quadratische Form q_A für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch. Dann ist die Niveaumenge

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : q_A(x) = 1\}$$

ein Kegelschnitt. Verschiedene symmetrische Matrizen liefern verschiedene Kegelschnitte.

Sei eine quadratische Form q_A für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch. Dann ist die Niveaumenge

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : q_A(x) = 1\}$$

eine Quadrik oder Fläche 2. Grades. Verschiedene quadratische Formen liefern verschiedene Quadriken

Wenn die Matrix A diagonal ist, dann sind die Koordinatenachsen parallel mit den Hauptachsen des Kegelschnitts. Ein Kegelschnitt im Hauptachsensystem können wir in Normalform bringen.

10.7 Hauptachsentransformation einer quadr. Form

Wir können durch zwei Koordinatentransformationen (Drehung $y = Tx$ und Verschiebung $z = y + c$) jede quadratische Form rein quadratisch machen.

Während der Koordinatenvektor x die quadratische Form in der Standardbasis darstellt, stellt der Koordinatenvektor z die quadratische Form in der neuen Basis dar.

Die Basis, in der $q(x)$ rein quadratisch wird, ist die Eigenbasis der zugehörigen symmetrischen Matrix A.

Bsp: $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2$

Vorgehen:

Je nach Aufgabe müssen nicht alle Punkte durchgeführt werden. Für ausschliesslich Hauptachsentransformation reicht 1-3.

1. Man bestimme die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass $q(x) = x^T A x$

   Trick: $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$s

   Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

2. Man diagonalisiere die Matrix A (siehe 6.6) und bestimme die Transformationsmatrix T. Da A symmetrisch ist, kann T orthogonal gewählt werden und $T^{-1} = T^T$.

   T orthogonal wählen! Spalten von T normieren, falls zwei Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert: 8.4

   Bsp: $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Multipliziere aus: $q(y) = y^T \cdot D \cdot y$. Wir haben nun unsere Hauptachsentransformation durchgeführt.

   Bsp: $y^T D y = -3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2$

4. Falls in Aufgabe gefragt: Bringe Quadrik $q(x) + a^T x + b = 1$ in Normalform.

   Bestimme $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$.

   Bsp: $q(x) + 2x_3 - \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = -\frac{1}{3}$

5. Schreibe Quadrik in transformierter Form (ausmultiplizieren): $y^T D y + a^T T y + b = 1$

   Bsp: $y^T D y + a^T T y + b = -3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1 - \frac{1}{3} = 1$

6. Falls noch lineare Terme übrig: Ergänze quadratisch

   Bsp:
   $$\begin{aligned} 0 &= -3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1 - \tfrac{4}{3} \\ &= -3(y_1^2 - \tfrac{2}{3}y_1) - 2y_2^2 + 4y_3^2 - \tfrac{4}{3} \\ &= -3((y_1 - \tfrac{2}{2\cdot 3})^2 - (\tfrac{2}{2\cdot 3})^2) - 2y_2^2 + 4y_3^2 - \tfrac{4}{3} \\ &= -3(y_1 - \tfrac{2}{2\cdot 3})^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 - \tfrac{4}{3} + 3\cdot(\tfrac{1}{3})^2 \\ &= -3(y_1 - \tfrac{1}{3})^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 - 1 \end{aligned}$$

   Durchführung der zweiten Koordinatentransformation $z = y + c$ (Verschiebung). Man bestimme Vektor c.

   Danach enthält die Gleichung nur noch rein quadratische Terme.

   Bsp: $c = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow Q(z) = -3z_1^2 - 2z_2^2 + 4z_3^2$

7. Falls gefragt: Gib die zusammengesetzte Koordinatentransformation an: $z = T^T x + c$

Methode der kleinsten Quadrate

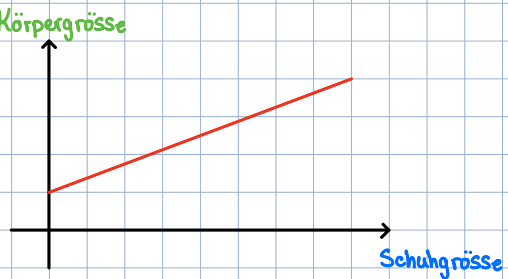
Kurz gesagt: Wie können wir eine möglichst gute Lösung für ein $\underbrace{\text{überbestimmtes LGS}}$ $Ax=c$ finden?

____ . $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m>n$

Relevanz / Beispiel:

Bei einer Umfrage werden Menschen bezüglich Körpergrösse und Schuhgrösse befragt. Wir wollen nun einen ____ zwischen Schuhgrösse und Körpergrösse finden damit wir nachher basierend auf Schuhgrösse eine Schätzung für die Körpergrösse machen können. Wir suchen also eine Gleichung der Form

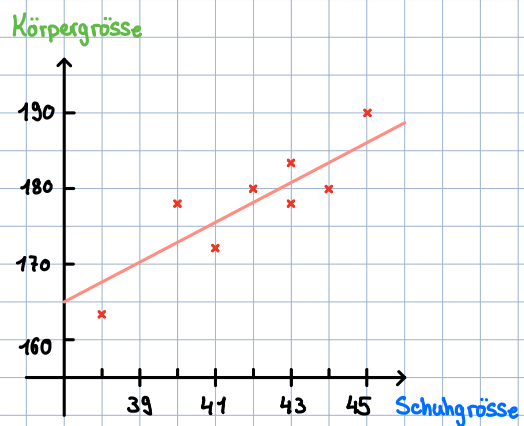
$$\underset{\text{Körpergrösse}}{p} = \underbrace{a\,\overset{\text{Schuhgrösse}}{t} + b}_{a,\,b \;\to\; \text{Unbekannte}}$$



Wir suchen also a und b, aber in der Umfrage werden 8 Menschen befragt. Wir können also nicht eine ____ für a und b finden. Wie wählen wir also die „____" Parameter damit das Modell möglichst gut passt?

Schuhgrösse	Körpergrösse
41	172
45	190
42	180
43	183
43	178
38	163
44	180
40	178

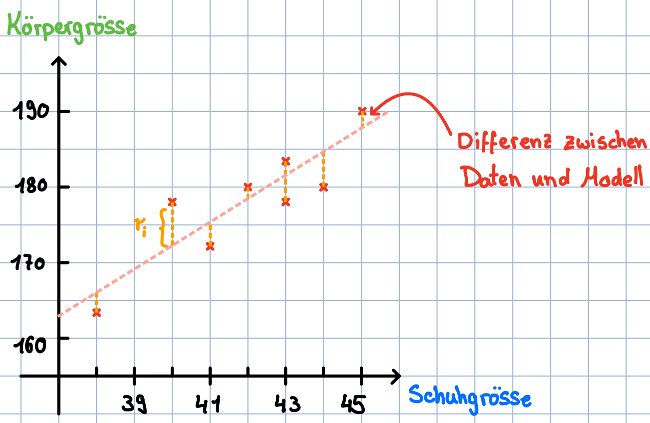
$$\begin{aligned}
172 &= a\,41 + b\\
190 &= a\,45 + b\\
180 &= a\,42 + b\\
183 &= a\,43 + b\\
178 &= a\,43 + b\\
163 &= a\,38 + b\\
180 &= a\,44 + b\\
178 &= a\,40 + b
\end{aligned}$$



Die Grundidee ist es den ____ zu minimieren.

Residuenvektor

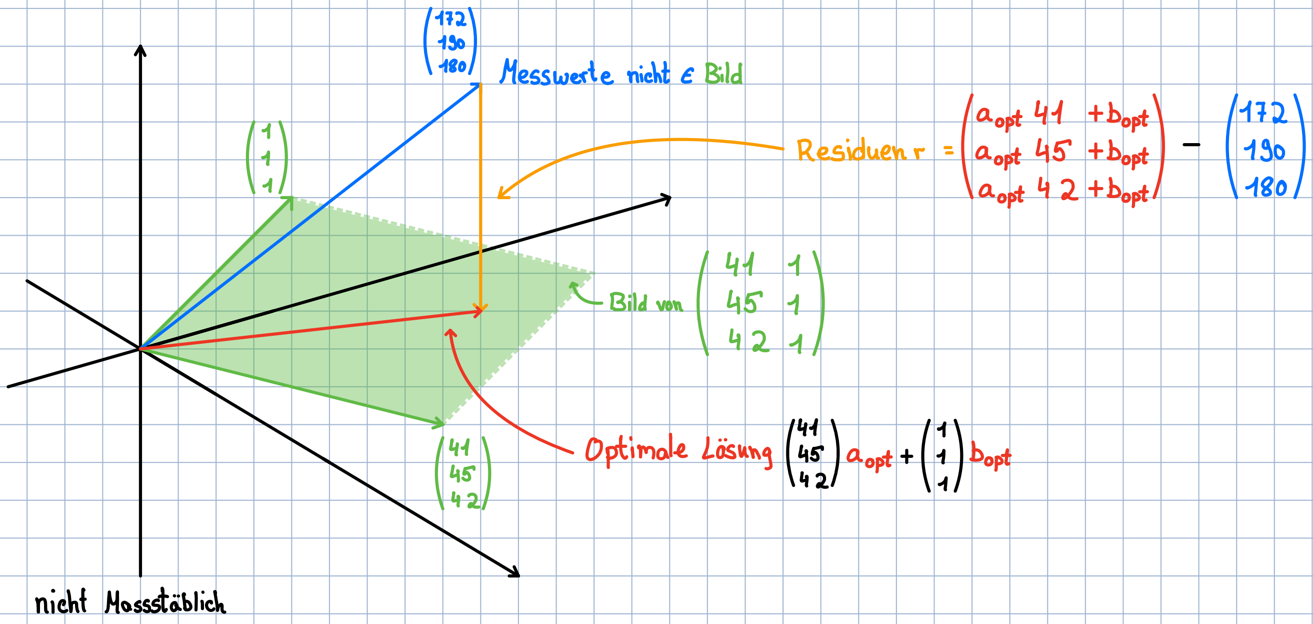
$$\boxed{\begin{matrix} r_1\\ r_2\\ r_3\\ r_4\\ r_5\\ r_6\\ r_7\\ r_8 \end{matrix}}\;\begin{aligned}
&= a\,41 + b - 172\\
&= a\,45 + b - 190\\
&= a\,42 + b - 180\\
&= a\,43 + b - 183\\
&= a\,43 + b - 178\\
&= a\,38 + b - 163\\
&= a\,44 + b - 180\\
&= a\,40 + b - 178
\end{aligned}$$



Was hat das genau mit LinAlg zu tun? Betrachen wir dafür das Ganze graphisch.

Dafür reduziern wir alles auf 3 Gleichungen.

$$\begin{aligned} 172 &= a\,41 + b \\ 190 &= a\,45 + b \\ 180 &= a\,42 + b \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} 172 \\ 190 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 1 \\ 45 & 1 \\ 42 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



Wir wollen nun die Länge des Residuenvektors minimieren:

$$\|r\| = \sqrt{((a\,41 + b) - 172)^2 + ((a\,45 + b) - 190)^2 + ((a\,42 + b) - 180)^2}$$

Wie finde ich nun a und b, so dass $\|r\|$ minimal ist?

$$\begin{aligned} 172 &= a\,41 + b \\ 190 &= a\,45 + b \\ 180 &= a\,42 + b \\ 183 &= a\,43 + b \\ 178 &= a\,43 + b \\ 163 &= a\,38 + b \\ 180 &= a\,44 + b \\ 178 &= a\,40 + b \end{aligned}$$

$$C = \begin{pmatrix} 172 \\ 190 \\ 180 \\ 183 \\ 178 \\ 163 \\ 180 \\ 178 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 41 & 1 \\ 45 & 1 \\ 42 & 1 \\ 43 & 1 \\ 43 & 1 \\ 38 & 1 \\ 44 & 1 \\ 40 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und } r = A \cdot \begin{pmatrix} a_{opt} \\ b_{opt} \end{pmatrix} - c$$

a_{opt} und b_{opt} finden wir durch:

$$A \cdot y \perp r \qquad \text{(Bild von } A \text{ orthogonal zu } r\text{)}$$

$$\langle A \cdot y, r \rangle = 0$$

$$(A \cdot y)^T \cdot r = 0 \qquad \text{(Skalarprodukt ausgeschrieben)}$$

$$y^T A^T \left(A \cdot \begin{pmatrix} a_{opt} \\ b_{opt} \end{pmatrix} - c \right) = 0 \qquad (r \text{ eingesetzt})$$

$$y^T A^T A \cdot \begin{pmatrix} a_{opt} \\ b_{opt} \end{pmatrix} - y^T A^T c = 0$$

$$A^T A \cdot \begin{pmatrix} a_{opt} \\ b_{opt} \end{pmatrix} = A^T c$$

$$\boxed{(A^T A)^{-1} A^T \cdot c = \begin{pmatrix} a_{opt} \\ b_{opt} \end{pmatrix}}$$

Aus der Zusammenfassung:

11.1 Kleinste Quadrate

Mit dem Prinzip der „kleinsten Quadrate“ kann man zwar überbestimmte Gleichungssysteme nicht lösen, man kann jedoch eine möglichst „gute“ Lösung finden, indem man den quadratischen Fehler minimiert.

Bsp:

$$\begin{array}{lllll} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & = & 8 \quad \Rightarrow \text{ überbestimmt} \\ 2x_1 & + & 1x_2 & = & 3 \end{array}$$

Wir bilden die Differenz (= Fehler) aus der rechten und der linken Seite und nennen sie Residuenvektor r:

$$\begin{array}{lllllll} 2x_1 & + & 3x_2 & - & 6 & = & r_1 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 8 & = & r_2 \\ 2x_1 & + & 1x_2 & - & 3 & = & r_3 \end{array}$$

Wir suchen $(x_1\ x_2)^T$, sodass $\|r\|_2 = \|Ax - c\|_2$ minimal wird.
$\Rightarrow$ quadratischer Fehler minimal

Vorgehen:

Dazu lösen wir das Gleichungssystem $A^T Ax = A^T c$ welches in den meisten Aufgabe bereits in der Form $Ax - c = r$ gegeben ist (siehe oben).

1. Man bestimme A und c

   Bsp: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Man berechne $A^T A$ und $A^T c$

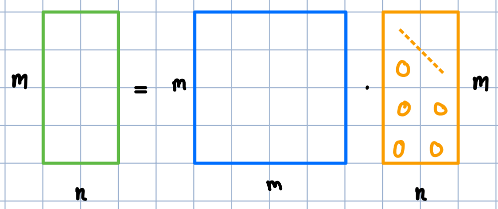
   Bsp: $A^T A = \begin{pmatrix} 17 & 20 \\ 20 & 2 \end{pmatrix}$, $A^T c = \begin{pmatrix} 42 \\ 53 \end{pmatrix}$

3. Man löse das Gleichungssystem $A^T Ax = A^T c$

   Bsp: $\begin{pmatrix} 17 & 20 \\ 20 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 53 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2.67 \\ -0.17 \end{pmatrix}$

QR-Zerlegung

Idee: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in das Produkt einer $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und einer $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$



Anwendung: Die QR-Zerlegung wird für ein alternatives Lösungsverfahren der kleinsten Quadrate gebraucht, welches numerisch bessere Resultate liefert.

Berechnung:

11.2 QR-Zerlegung

Mit der QR-Zerlegung kann eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in das Produkt einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einer oberen Rechtsdreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ verwandelt werden:

$$\boxed{A = Q \cdot R}$$

Vorgehen:
Wir wollen nacheinander alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen von A eliminieren.

1. Man wähle zu eliminierendes Element und benenne es a_{ij}.

   Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow a_{31}$ soll eliminiert werden

2. Lese i, j ab und notiere a_{jj}, a_{ij}

   Bsp: $i = 3, j = 1 \Longrightarrow a_{jj} = 1, a_{ij} = 1$

3. Berechne $w = \sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}$

   Bsp: $w = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

4. Man finde die richtige Rotationsmatrix Q'^T. Man nehme zuerst die Identitätsmatrix $I \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und setze $i_{ii} = \cos(\alpha)$, $i_{ij} = -\sin(\alpha)$, $i_{ji} = \sin(\alpha)$, $i_{jj} = \cos(\alpha)$.

   Bsp: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q'^T = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

5. Setze in Rotationsmatrix $\sin(\alpha) = \frac{a_{ij}}{w}$ und $\cos(\alpha) = \frac{a_{jj}}{w}$

   Bsp: $Q'^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

6. Berechne $Q'^T \cdot A = A'$

   Bsp: $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

7. Falls A' keine obere Dreiecksmatrix, wiederhole (finde Q''^T etc.) bis alle nötigen Elemente eliminiert.

   Bsp: $Q''^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}, A'' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. Wenn $A'' = R$ gefunden, berechne $Q = (Q''^T \cdot Q'^T)^T$
   $\Longrightarrow A = Q \cdot R$

Anwendung für kleinste Quadrate:

Kleinste Quadrate mit QR-Zerlegung
Löst man ein Optimierungsproblem mit dem Computer, liefert das in 10.1 beschriebene Verfahren ungenaue Lösungen (da numerisch instabil). Das Lösungsverfahren mittels QR-Zerlegung ist besser. **In Aufgabe nur machen, wenn explizit verlangt!**

Vorgehen:

1. Man bestimme A und c wie bei 10.1.

   Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Man führe die QR-Zerlegung durch $A = QR$

   Bsp: $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Man berechne $d = Q^T \cdot c$

   Bsp: $d = Q^T \cdot c = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

4. Man berechne löse das Gleichungssystem $R_0 \cdot \boxed{x} = d_0$, wobei R_0 die extrahierte Dreiecksmatrix aus R ist und d_0 die dazugehörigen oberen Einträge von d

   optimale Lösung

   Bsp: $R_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Beispielaufgaben

1.) MC.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

(a) $A^T A = \mathbb{1}_n$.

(b) $AA^T = -\mathbb{1}_n$.

(c) Die Eigenwerte von A haben Betrag ≤ 1.

(d) Die Eigenwerte von A haben Betrag ≥ 1.

Drei der folgenden Eigenschaften sind äquivalent für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Welche gehört nicht dazu?

(a) 0 ist ein Eigenwert von A.

(b) A ist singulär.

(c) Kern $A = \emptyset$. leere Menge

(d) Bild $A \neq \mathbb{R}^n$.

2.) offene Aufgabe:

1.) Sei ein überbestimmtes LGS gegeben. Löse das Ausgleichsproblem.

$$
\begin{aligned}
x_1 \phantom{{}+x_2} - 2 &= r_1 \\
x_1 + x_2 - 1 &= r_2 \\
x_1 + 2x_2 \phantom{{}-1} &= r_3 \\
x_1 + 3x_2 + 1 &= r_4 \\
x_1 + 4x_2 - 1 &= r_5
\end{aligned}
$$

Vorgehen:
Dazu lösen wir das Gleichungssystem $A^T Ax = A^T c$ welches in den meisten Aufgabe bereits in der Form $Ax - c = r$ gegeben ist (siehe oben).

1. Man bestimme A und c
2. Man berechne $A^T A$ und $A^T c$
3. Man löse das Gleichungssystem $A^T Ax = A^T c$

2.) QR-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

Vorgehen:
Wir wollen nacheinander alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen von A eliminieren.

1. Man wähle zu eliminierendes Element und benenne es a_{ij}.
2. Lese i, j ab und notiere a_{jj}, a_{ij}
3. Berechne $w = \sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}$
4. Man finde die richtige Rotationsmatrix Q'^T. Man nehme zuerst die Identitätsmatrix $I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und setze $i_{ii} = \cos(\alpha)$, $i_{ij} = -\sin(\alpha)$, $i_{ji} = \sin(\alpha)$, $i_{jj} = \cos(\alpha)$.
5. Setze in Rotationsmatrix $\sin(\alpha) = \frac{a_{ij}}{w}$ und $\cos(\alpha) = \frac{a_{jj}}{w}$
6. Berechne $Q'^T \cdot A = A'$
7. Falls A' keine obere Dreiecksmatrix, wiederhole (finde Q''^T etc.) bis alle nötigen Elemente eliminiert.
8. Wenn $A'' = R$ gefunden, berechne $Q = (Q''^T \cdot Q'^T)^T$ $\implies A = Q \cdot R$