Übung 10 (09.05.25)

Recap

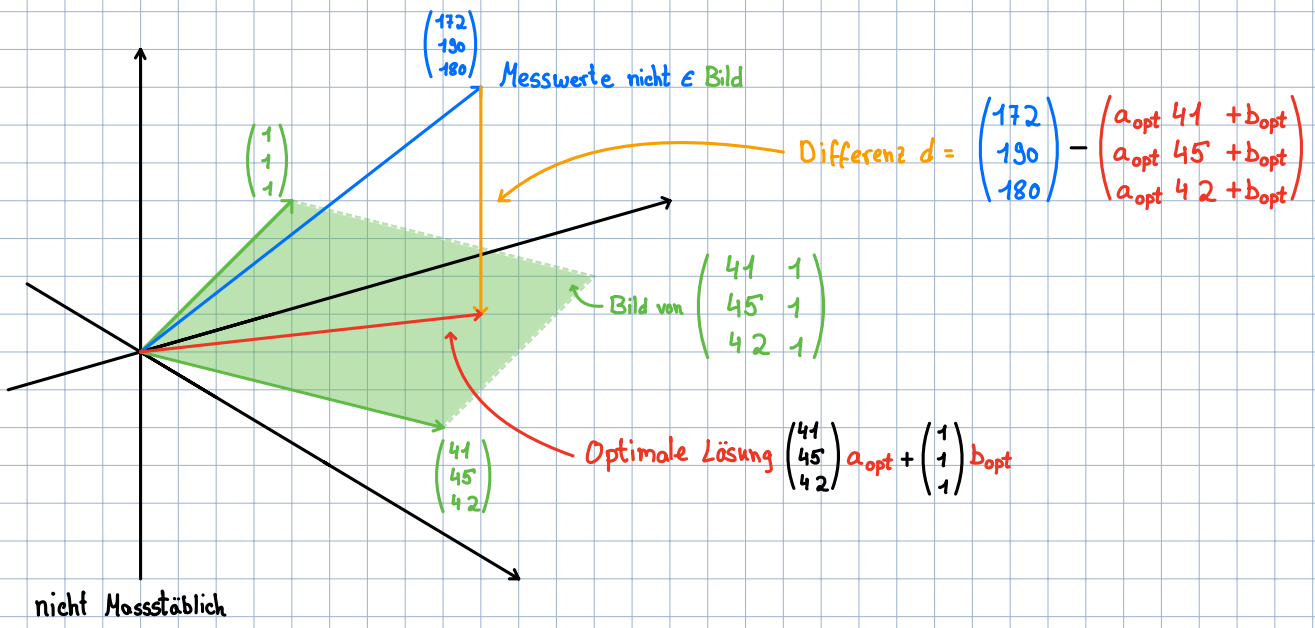
Methode der kleinsten Quadrate:

Kurz gesagt: Wie können wir eine möglichst gute Lösung für ein überbestimmtes LGS $Ax=c$ finden?

Nehmen wir als Bsp ein System mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten.

$$\begin{aligned} 172 &= a\,41 + b \\ 190 &= a\,45 + b \\ 180 &= a\,42 + b \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} 172 \\ 190 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 1 \\ 45 & 1 \\ 42 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Graphisch können wir uns das wie folgt vorstellen:



Wir wollen nun die Länge des Differenzvektors minimieren:

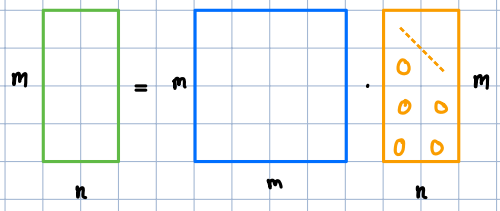
$$\|d\| = \sqrt{(172 - (a\,41 + b))^2 + (190 - (a\,45 + b))^2 + (180 - (a\,42 + b))^2}$$

Wie finde ich nun a und b, so dass die Differenz minimal ist?

$$(A^T A)^{-1} A^T \cdot c = \begin{pmatrix} a_{opt} \\ b_{opt} \end{pmatrix}$$

QR-Zerlegung:

Idee: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in das Produkt einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und einer Rechtsdreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$



Anwendung für kleinste Quadrate:

Kleinste Quadrate mit QR-Zerlegung
Löst man ein Optimierungsproblem mit dem Computer, liefert das in 10.1 beschriebene Verfahren ungenaue Lösungen (da numerisch instabil). Das Lösungsverfahren mittels QR-Zerlegung ist besser. **In Aufgabe nur machen, wenn explizit verlangt!**

Vorgehen:

① Man bestimme A und c wie bei 10.1.

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

② Man führe die QR-Zerlegung durch $A = QR$

Bsp: $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

③ Man berechne $d = Q^T \cdot c$

Bsp: $d = Q^T \cdot c = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

④ Man berechne löse das Gleichungssystem $R_0 \cdot \boxed{x} = d_0$, wobei R_0 die extrahierte Dreiecksmatrix aus R ist und d_0 die dazugehörigen oberen Einträge von d

Bsp: $R_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

→ optimale Lösung

Lineare Differentialgleichungssyteme

Homogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Solche Gleichungen sind bereits aus der Analysis bekannt. Allgemein ist eine solche Differentialgleichung gegeben durch: $y'(t) = a\,y(t) \quad (a \in \mathbb{R}, \text{konstant})$

Mit der Lösung: $y(t) = c\,e^{at} \quad , c \in \mathbb{R}$

Ein konkretes Beispiel hierfür ist: $y'(t) = -2\,y(t)$

Mit der Anfangsbedingung: $y(0) = 3$

Die Lösung dieser Gleichung ist dann gegeben durch:

$$y(t) = y(0)\,e^{-2t} = 3e^{-2t}$$

Die Lösungsmenge dieser Differentialgleichung $\{y \in C^1(\mathbb{R}) : y' = a\,y\}$ ist ein 1-D UR von den 1-mal stetig differenzierbaren Funktionen $C^1(\mathbb{R})$.

Systeme homogener linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

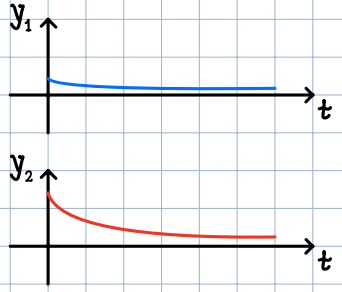
Genau wie wir auch schon in LinAlg I sahen, können wir Gleichungen in einen System beschreiben. Das geht auch mit DGL's. Betrachten wir dafür ein Beispiel:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2\,y_1(t) & y_1(0) = 1 \\ y_2'(t) = -4\,y_2(t) & y_2(0) = 3 \end{cases}$$

Dieses System ist entkoppelt da beide Gleichungen unabhänig von einander sind. Dadurch können wir sie auch separat lösen.

$$y_1(t) = y_1(0)\,e^{-2t} = e^{-2t}$$

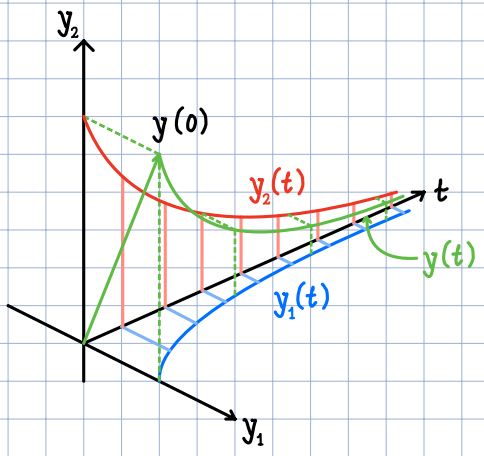
$$y_2(t) = y_2(0)\,e^{-4t} = 3e^{-4t}$$



Und da wir in LinAlg sind können wir auch solche Systeme in Matrixschreibweise ausdrücken.

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow y(t) = 1\, e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\, e^{-4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Graphisch können wir uns das wie herkömmliche Linearkombinationen vorstellen, bloss das jetzt alles auch von t abhängt



Es kann aber auch sein, dass die Gleichungen abhänig von einander sind, beispielsweise:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -4\, y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) = -2\, y_1(t) - 3\, y_2(t) \end{cases} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}}_{\text{Das können wir nicht mehr direkt lösen.}}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wenn wir die Matrizen der zwei Beispiele vergleichen fällt folgendes auf:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

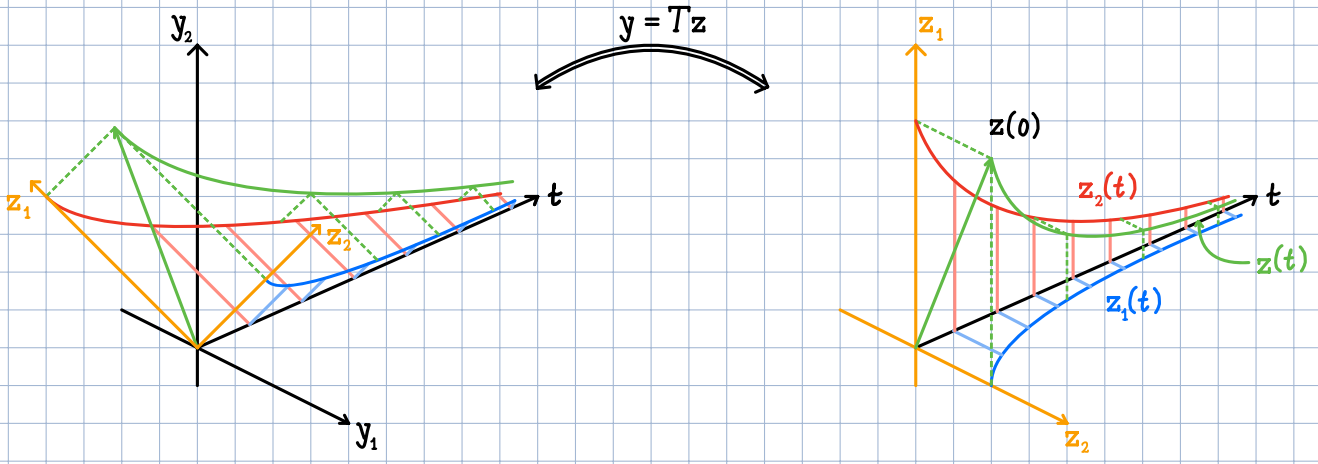
Die Matrix A_1 ist Diagonal! Wenn wir nun unsere Matrix A_2 diagonalisieren, sollten wir das System wie oben lösen können. Wir führen also einen Basiswechsel $y = Tz$ in die Eigenbasis durch mit $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (EV von A_2)

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad \xRightarrow{z = T^{-1}y} \quad \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}}_{T^{-1}AT} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad z(0) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}}_{T^{-1}y(0)}$$

In der Basis z können wir das System nun lösen und danach zurück Transformieren.

$$z(t) = \frac{4}{3} e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} e^{-5t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{y = Tz} y(t) = \frac{4}{3} e^{-2t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Generell können wir jedes System homogener linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten kompakt mit Matrizen darstellen.

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \dots &= \dots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned} \longrightarrow Y' = AY \quad \text{mit} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Anfangsbedingung ist dann: $Y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}^n$

und die allgemeine Lösung lautet: $Y(x) = e^{Ax} Y_0$

Wenn nun A diagonalisierbar ist, vereinfacht sich die allgemeine Lösung enorm:

$$Y(x) = e^{Ax} Y_0 = T \, \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}) \, T^{-1} Y_0$$

sonst: $e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$

Beispiel:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2 & y_1(0) = 0 \\ y_2' = 2y_1 + 2y_2 & y_2(0) = 5 \end{cases} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Man diagonalisiere die Matrix $A = TDT^{-1}$ (siehe 6.6) und bestimme die Transformationsmatrix T.
2. Sei $t^{(i)}$ die i-te Spalte von T und d_{ii} der i-te Diagonaleintrag von D.
   Die Lösung des Diff'gleichungssystems lautet dann:
   $y(t) = z_1(0) \cdot t^{(1)} \cdot e^{d_{11}t} + z_2(0) \cdot t^{(2)} \cdot e^{d_{22}t} + \dots$
3. Variante 1: Bestimme T^{-1}, danach $z(0) = T^{-1} \cdot y(0)$.
   Variante 2: Bestimme $z(0)$ durch Lösen des Gleichungssystems $T \cdot z(0) = y(0)$.
   Falls keine Anfangsbedingungen gegeben, $z_i(0) = C_i$.

1.) Diagonalisieren:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) \longrightarrow \lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = -1$$

$$v_1: \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2: \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2.) Allgemeine Lösung:

$$y(t) = z_1(0)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{4t} + z_2(0)\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}e^{-t}$$

3.) Lösung des Anfangswertproblems:

Variante 1: $z = T^{-1}y \longrightarrow z(0) = T^{-1}y(0)$, $T^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}$

$$z(0) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \longrightarrow y(t) = 3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{4t} - \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}e^{-t}$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix}3e^{4t} & -3e^{-t}\\ 3e^{4t} & +2e^{-t}\end{pmatrix}$$

Homogene lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Bis jetzt haben wir nur Differentialgleichungen 1. Ordnung betrachtet, also Differentialgleichungen in denen maximal die 1. Ableitung vorkommt. Wie lösen wir aber Differentialgleichungen höherer Ordnung? Betrachten wir hierfür die Gleichung:

$$y'''(t) + 4y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 0$$

Durch eine Substitution können wir die Differentialgleichung in ein homogenes lineares System 1. Ordnung umwandeln:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &:= y \\ y_1 &:= y' \\ y_2 &:= y'' \\ y_3 &:= y''' \end{aligned}\right\} \begin{aligned} y_1 &= y_0' \\ y_2 &= y_1' \\ y_3 &= y_2' \end{aligned} \longrightarrow \underbrace{y_2'(t) + 4y_2(t) + 2y_1(t) - 3y_0(t) = 0}_{\text{DGL 1. Ordnung mit 3 Variabeln.}}$$

Damit die Informationen der Substitution nicht verloren gehen, werden Sie mit Gleichungen in das System eingebunden

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ y_2' &= 3y_0 - 2y_1 - 4y_2 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix}y_0'\\y_1'\\y_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\3 & -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

Sidenote: Die Subtituition funktioniert auch bei nicht konst. Koeffizienten und inhomogenen Gleichungen.

Beispielaufgabe

MC:

Welche Aussage zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ passt nicht zu den anderen?

(a) $\dim \text{Kern}(A) = 2$.

(b) Es gibt zwei Pivot-Variabeln.

(c) $\dim \text{Bild}(A) = 1$.

(d) $\text{Rang}(A) = 2$.

Wir wissen, dass RangA = Anzahl Pivotvariablen ist

Es gilt generell dimBildA = RangA = Anzahl Pivotvariablen → a, b, d

Was hat eine Matrix stets mit all ihren Potenzen gemeinsam?

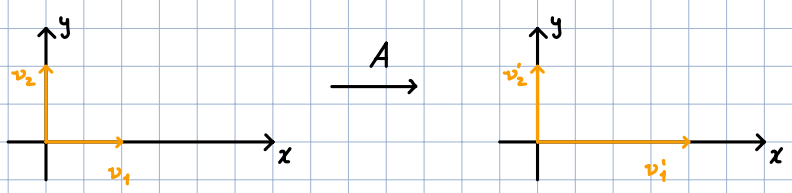
(a) Die Eigenwerte.

(b) Die Eigenvektoren.

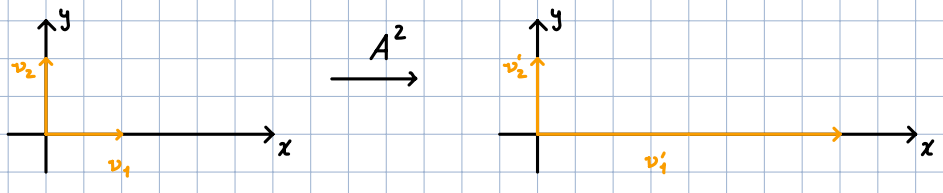
(c) Den Rang.

(d) Die Determinante.

Potenzieren bedeutet nichts andres als die Abbildung die von der Matrix beschrieben wird mehrmals anzuwenden. Sei nun A eine Streckung um zwei in x-Richtung



Dann ist A^2 eine Streckung um 4 in x-Richtung



Offene Aufgaben:

1. Man diagonalisiere die Matrix $A = TDT^{-1}$ (siehe 6.6) und bestimme die Transformationsmatrix T.
2. Sei $t^{(i)}$ die i-te Spalte von T und d_{ii} der i-te Diagonaleintrag von D.
   Die Lösung des Diff'gleichungssystems lautet dann:
   $y(t) = z_1(0) \cdot t^{(1)} \cdot e^{d_{11}t} + z_2(0) \cdot t^{(2)} \cdot e^{d_{22}t} + \dots$
3. Variante 1: Bestimme T^{-1}, danach $z(0) = T^{-1} \cdot y(0)$.
   Variante 2: Bestimme $z(0)$ durch Lösen des Gleichungssystems $T \cdot z(0) = y(0)$.
   Falls keine Anfangsbedingungen gegeben, $z_i(0) = C_i$.

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = Ay$, $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

1.) Diagonalisieren

EW: $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 6 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) \longrightarrow \lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = -1$

EV:

$v_1: \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$v_2: \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

2.) Allgemeine Lösung:

$$y = z_1(0)\, e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + z_2(0)\, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3.) Anfangsbedingung: (Variante 2)

$$Tz(0) = y(0)$$

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{array}\right)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 10 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} z_2(0) = -2 \\ z_1(0) = 2 \end{array}$$

$$\boxed{y = 2\, e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Tipps zur Serie

- MC 1-5: mit Analysis lösbar

- 6.): a.) Was müssen Spalten erfüllen?

  b.) Ausgleichsproblem kann mit $Ax - c = r$ geschrieben werden

  c.) Cheatsheet

  d.) Einsetzen

- 7.): a.) Entkoppeln!

  b.) Anfangsbedingung einsetzen

  c.) Nicht selbe Anfangsbedingung wie bei b.) ! Wann konvergiert exp gegen 0 ?

- 8.): Ähnlich wie 1. Ordnung

  Standartlösung für System 2. Ordnung mit EW<0 : $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos\sqrt{d_{11}} + b_1 \sin\sqrt{d_{11}} \\ a_2 \cos\sqrt{d_{22}} + b_2 \sin\sqrt{d_{22}} \end{pmatrix}$