

Übung 10 (09.05.25)

Recap

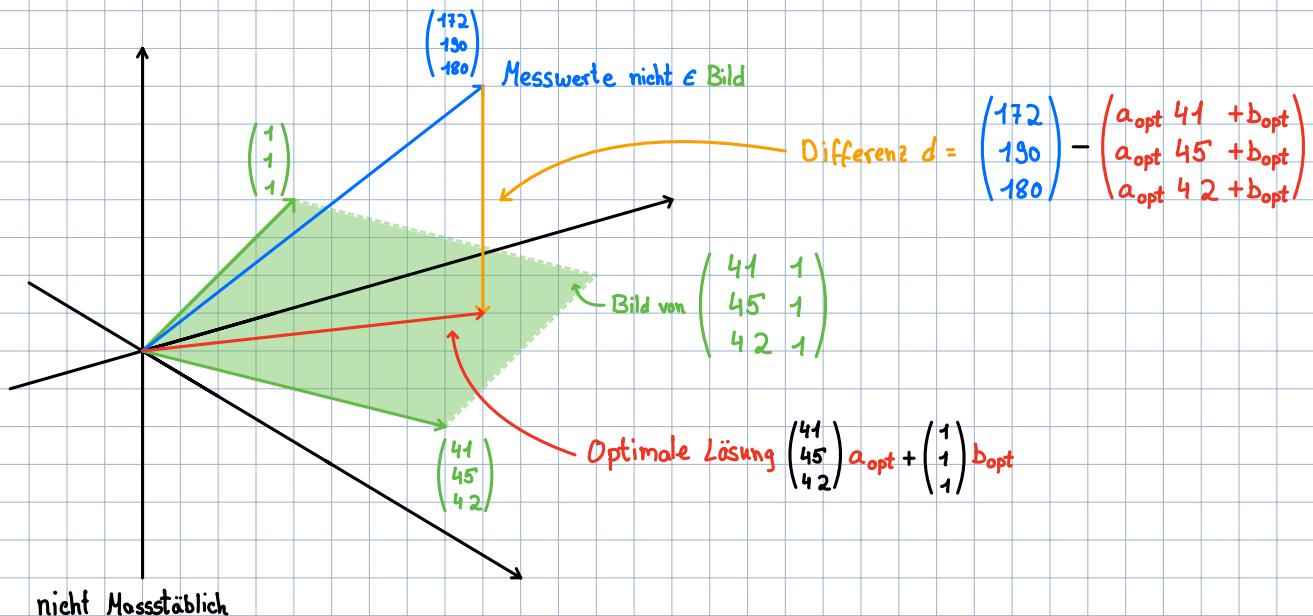
Methode der kleinsten Quadrate:

Kurz gesagt: Wie können wir eine möglichst gute Lösung für ein überbestimmtes LGS $Ax=c$ finden?

Nehmen wir als Bsp ein System mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten.

$$\begin{aligned} 172 &= a \cdot 41 + b \\ 190 &= a \cdot 45 + b \\ 180 &= a \cdot 42 + b \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} 172 \\ 190 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 1 \\ 45 & 1 \\ 42 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Graphisch können wir uns das wie folgt vorstellen:



Wir wollen nun die Länge des Differenzvektors minimieren:

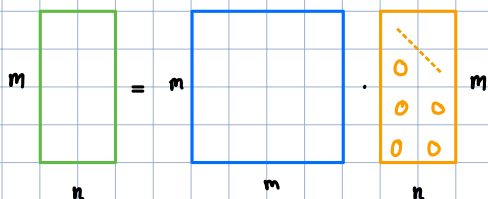
$$\|d\| = \sqrt{(172 - (a \cdot 41 + b))^2 + (190 - (a \cdot 45 + b))^2 + (180 - (a \cdot 42 + b))^2}$$

Wie finde ich nun a und b , so dass die Differenz minimal ist?

$$(A^T A)^{-1} A^T \cdot c = \begin{pmatrix} a_{\text{opt}} \\ b_{\text{opt}} \end{pmatrix}$$

QR-Zerlegung:

Idee: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in das Produkt einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und einer Rechtsdreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$



Anwendung für kleinste Quadrate:

Kleinste Quadrate mit QR-Zerlegung

Löst man ein Optimierungsproblem mit dem Computer, liefert das in 10.1 beschriebene Verfahren ungenaue Lösungen (da numerisch instabil). Das Lösungsverfahren mittels QR-Zerlegung ist besser. **In Aufgabe nur machen, wenn explizit verlangt!**

Vorgehen:

- ① Man bestimme A und c wie bei 10.1.

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- ② Man führe die QR-Zerlegung durch $A = QR$

Bsp: $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- ③ Man berechne $d = Q^T \cdot c$

Bsp: $d = Q^T \cdot c = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

- ④ Man berechne löse das Gleichungssystem $R_0 \cdot \boxed{x} = d_0$, wobei R_0 die extrahierte Dreiecksmatrix aus R ist und d_0 die dazugehörigen oberen Einträge von d

Bsp: $R_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \end{pmatrix}, d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

*optimale Lösung

Lineare Differentialgleichungssysteme

Homogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Solche Gleichungen sind bereits aus der Analysis bekannt. Allgemein ist eine solche Differentialgleichung gegeben durch:

$$y'(t) = \alpha y(t) \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \text{konstant})$$

Mit der Lösung:

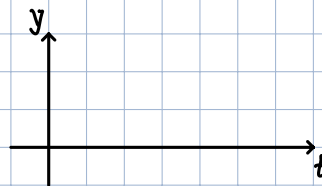
$$y(t) = \text{---}, C \in \mathbb{R}$$

Ein konkretes Beispiel hierfür ist: $y'(t) = \text{---}$

Mit der Anfangsbedingung: $y(0) = \text{---}$

Die Lösung dieser Gleichung ist dann gegeben durch:

$$y(t) = \text{---} = \text{---}$$



Die Lösungsmenge dieser Differentialgleichung $\{y \in C^1(\mathbb{R}) : y' = \alpha y\}$ ist ein --- von den 1-mal stetig differenzierbaren Funktionen $C^1(\mathbb{R})$.

Systeme homogener linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

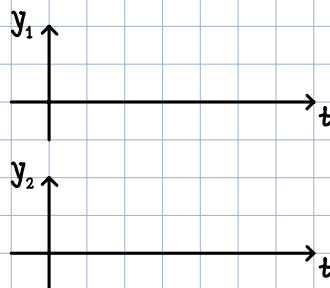
Genau wie wir auch schon in LinAlg I sahen, können wir Gleichungen in einem System beschreiben. Das geht auch mit DGL's. Betrachten wir dafür ein Beispiel:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2 y_1(t) & y_1(0) = 1 \\ y_2'(t) = -4 y_2(t) & y_2(0) = 3 \end{cases}$$

Dieses System ist --- da beide Gleichungen unabhängig von einander sind. Dadurch können wir sie auch separat lösen.

$$y_1(t) = \text{---} = \text{---}$$

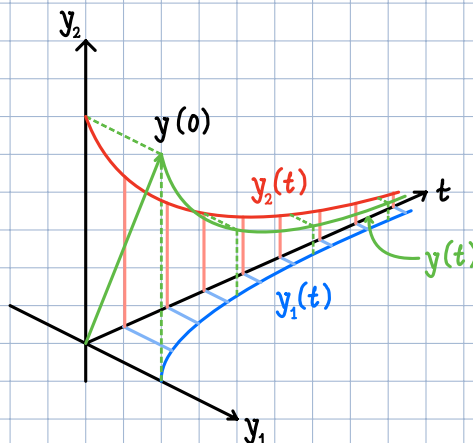
$$y_2(t) = \text{---} = \text{---}$$



Und da wir in LinAlg sind können wir auch solche Systeme in Matrixschreibweise ausdrücken.

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow y(t) = 1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 e^{-4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Graphisch können wir uns
das wie herkömmliche
Linearkombinationen vorstellen,
bloss das jetzt alles auch
von t abhängt



Es kann aber auch sein, dass die Gleichungen abhängig von einander sind, beispielsweise:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -4 y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) = -2 y_1(t) - 3 y_2(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Das können wir nicht mehr
direkt lösen.

Wenn wir die Matrizen der zwei Beispiele vergleichen fällt folgendes auf:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A_1 ist diagonal! Wenn wir nun unsere Matrix A_2 diagonalisieren, sollten wir das System

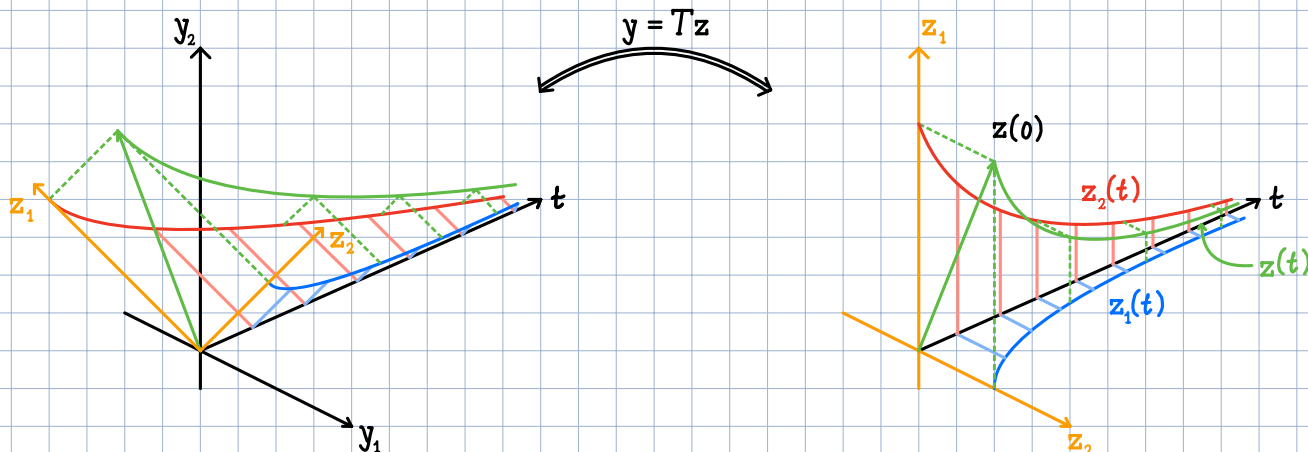
wie oben lösen können. Wir führen also einen Basiswechsel $y = Tz$ in die Eigenbasis durch mit $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
 $\checkmark$ EV von A_2

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \xrightarrow{y = Tz} \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}}_{T^{-1}AT} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad z(0) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}}_{T^{-1}y(0)}$$

In der Basis z können wir das System nun lösen und danach zurück transformieren.

$$z(t) = \frac{4}{3} e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} e^{-5t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{y = Tz} y(t) = \frac{4}{3} e^{-2t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Generell können wir jedes System homogener linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten kompakt mit Matrizen darstellen.

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned} \longrightarrow Y' = AY \quad \text{mit} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Anfangsbedingung ist dann: $Y(0) = \dots$

und die allgemeine Lösung lautet: $Y(x) = \dots$

Wenn nun A diagonalisierbar ist, vereinfacht sich die allgemeine Lösung enorm:

$$Y(x) = e^{Ax} Y_0 = T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}) T^{-1} Y_0$$

sonst: $e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$

Beispiel:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 2y_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 5 \end{matrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1.) Diagonalisieren:

- ① Man diagonalisiere die Matrix $A = TDT^{-1}$ (siehe 6.6) und bestimme die Transformationsmatrix T .
- ② Sei $t^{(i)}$ die i -te Spalte von T und d_{ii} der i -te Diagonaleintrag von D .
Die Lösung des Diff'gleichungssystems lautet dann:
 $y(t) = z_1(0) \cdot t^{(1)} \cdot e^{d_{11}t} + z_2(0) \cdot t^{(2)} \cdot e^{d_{22}t} + \dots$
- ③ Variante 1: Bestimme T^{-1} , danach $z(0) = T^{-1} \cdot y(0)$.
Variante 2: Bestimme $z(0)$ durch Lösen des Gleichungssystems $T \cdot z(0) = y(0)$.
Falls keine Anfangsbedingungen gegeben, $z_i(0) = C_i$.

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = (\lambda-4)(\lambda+1) \longrightarrow \lambda_1 = \dots \quad \lambda_2 = \dots$$

$$\left. \begin{aligned} v_1: \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \\ v_2: \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} D = \begin{pmatrix} \dots & 0 \\ 0 & \dots \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

2.) Allgemeine Lösung:

$$y(t) = \underline{\hspace{4cm}}$$

3.) Lösung des Anfangswertproblems:

Variante 1: $z = T^{-1}y \rightarrow z(0) = T^{-1}y(0)$, $T^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$z(0) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow y(t) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{pmatrix}$$

Homogene lineare Differentialgleichungen **höherer** Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Bis jetzt haben wir nur Differentialgleichungen 1. Ordnung betrachtet, also Differentialgleichungen in denen maximal die 1. Ableitung vorkommt. Wie lösen wir aber Differentialgleichungen höherer Ordnung? Betrachten wir hierfür die Gleichung:

$$y'''(t) + 4y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 0$$

Durch eine Substitution können wir die Differentialgleichung in ein homogenes lineares System

1. Ordnung umwandeln:

$$y_0 := y$$

$$y_1 := y' \quad y_1 = y_0'$$

$$y_2 := y'' \quad y_2 = y_1'$$

$$y_3 := y''' \quad y_3 = y_2'$$

$$\longrightarrow \underline{\hspace{4cm}}$$

Damit die Informationen der Substitution nicht verloren gehen, werden Sie mit Gleichungen in das System eingebunden

$$y_0' = y_1$$

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = 3y_0 - 2y_1 - 4y_2$$

oder

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Sidenote: Die Substitution funktioniert auch bei nicht konst. Koeffizienten und inhomogenen Gleichungen.

Beispielaufgabe

MC:

Welche Aussage zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ passt nicht zu den anderen?

- (a) $\dim \text{Kern}(A) = 2$.
- (b) Es gibt zwei Pivot-Variablen.
- (c) $\dim \text{Bild}(A) = 1$.
- (d) $\text{Rang}(A) = 2$.

Was hat eine Matrix stets mit all ihren Potenzen gemeinsam?

- (a) Die Eigenwerte.
- (b) Die Eigenvektoren.
- (c) Den Rang.
- (d) Die Determinante.

Offene Aufgaben:

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = Ay$, $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

- ① Man diagonalisiere die Matrix $A = TDT^{-1}$ (siehe 6.6) und bestimme die Transformationsmatrix T .

② Sei $t^{(i)}$ die i -te Spalte von T und d_{ii} der i -te Diagonaleintrag von D .
Die Lösung des Diff'gleichungssystems lautet dann:
 $y(t) = z_1(0) \cdot t^{(1)} \cdot e^{d_{11}t} + z_2(0) \cdot t^{(2)} \cdot e^{d_{22}t} + \dots$

③ Variante 1: Bestimme T^{-1} , danach $z(0) = T^{-1} \cdot y(0)$.
Variante 2: Bestimme $z(0)$ durch Lösen des Gleichungssystems $T \cdot z(0) = y(0)$.
Falls keine Anfangsbedingungen gegeben, $z_i(0) = C_i$.

Tipps zur Serie

- MC 1-5: mit Analysis lösbar

- 6.): a.) Was müssen Spalten erfüllen?

b.) Ausgleichsproblem kann mit $Ax - c = r$ geschrieben werden

c.) Cheatsheet

d.) Einsetzen

- 7.): a.) Entkopplern!

b.) Anfangsbedingung einsetzen

c.) Nicht selbe Anfangsbedingung wie bei b.)! Wann konvergiert $\exp$ gegen 0?

- 8.): Ähnlich wie 1. Ordnung

Standartlösung für System 2. Ordnung mit $\text{EW} < 0$:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos \sqrt{d_{11}} + b_1 \sin \sqrt{d_{11}} \\ a_2 \cos \sqrt{d_{22}} + b_2 \sin \sqrt{d_{22}} \end{pmatrix}$$