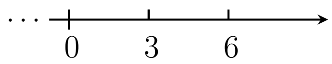
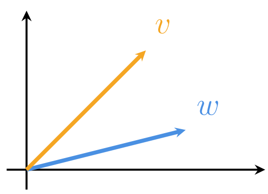
3 Normen und Skalarprodukte

3.1 Normen

Bisher haben wir mit den Vektorräumen die Vektoroperationen verallgemeinert. Wir wissen also wie wir, unabhängig von den Objekten in einem Vektorraum rechnen können. Nun wollen wir einen weiteren Schritt machen und die Grösse von Vektoren aus einem Vektorraum vergleichen. Dafür ordnen wir jedem Vektor v, in einem Vektorraum, eine reelle positive Zahl zu, da wir deren Grösse gut vergleichen können, z.B. können wir ganz klar sagen, dass die Zahl 6 grösser als die Zahl 3 ist.



Wie sieht es jedoch mit Vektoren aus? Hier ist die Antwort nicht so offensichtlich. Welcher dieser Vektoren ist grösser?



$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ oder } w = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun kommt es darauf an was grösser in diesem Kontext bedeutet z.B. könnte man argumentieren, dass:

- v ist grösser, da die geometrische Länge grösser ist.
- w ist grösser, da der Vektor eine grössere Zahl enthält.

Normen werden uns nun helfen diese Frage eindeutig zu beantworten. Denn eine Norm ist eine fixe Regel, mit welcher man jedem Vektor eine reelle positive Zahl zuordnen kann. Dadurch kann man Sie dann vergleichen. Mathematisch lässt sich das durch eine Abbildung ausdrücken:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|.$$

Wie im Beispiel von oben, gibt es viele Möglichkeiten diese Zuordnung zu machen.

- Geometrische Länge (Euklidische Norm)

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \to \quad \begin{aligned} \|v\|_2 &= \sqrt{18} \\ \|w\|_2 &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

- grösster Eintrag (Maximumsnorm)

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \|v\|_\infty &= 3 \\ \|w\|_\infty &= 4 \end{aligned}$$

Achtung! Nicht alles ist eine Norm, es müssen bestimmte Bedingungen erfüllt sein damit eine Norm vorhanden ist.

Vektornormen

Eine Norm ordnet jedem Vektor eine reelle Zahl zu und kann so als eine Art Mass verstanden werden. $\forall v, w \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ muss gelten:

$$\|v\| \geq 0 \text{ und } \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$$

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Beispiele solcher Normen sind:

$$\text{Auf } \mathbb{R}^n \begin{cases} \|v\|_2 := \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} & \text{(Euklidische Norm)} \\ \|v\|_\infty := \max\{|v_1|, \ldots, |v_n|\} & \text{(Maximumsnorm)} \\ \|v\|_p := (|v_1|^p + \cdots + |v_n|^p)^{\frac{1}{p}} & (p\text{-Norm}, 1 \leq p < \infty) \end{cases}$$

$$\text{Auf } \mathbb{R}^{n \times m} \begin{cases} \|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} & \text{(Hilbert-Schmidt-Norm)} \\ \|A\|_{\text{SM}} := \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| & \text{(Spaltenmaximumsnorm)} \\ \|A\|_{\text{ZM}} := \max\limits_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| & \text{(Zeilenmaximumsnorm)} \end{cases}$$

3.2 Skalarprodukte

Wir haben nun einen Weg um die Grösse von Vektoren in einem Vektorraum zu vergleichen. Im nächsten Schritt wollen wir die Beziehung zwischen zwei Vektoren mit einer reellen Zahl beschrieben. Wieder lässt sich dies durch eine Abbildung beschreiben.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle.$$

Auch hier müssen bestimmte Bedingungen erfüllt sein.

Skalarprodukte

Ein Skalarprodukt ordnet jedem Vektorpaar eine reelle Zahl zu, diese beschreibt die Beziehung der beiden Vektoren zueinander. $\forall x, y, z \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ muss gelten:

$$\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$$

$$\langle x, \alpha \cdot y\rangle = \alpha \cdot \langle x, y\rangle$$

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$$

$$\langle x, x\rangle \geq 0 \text{ und } \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Wenn $\langle x, y\rangle = 0$, dann sind x, y orthogonal zueinander ($x \perp y$).

3.3 Vom Skalarprodukt induzierte Norm

Das Skalarprodukt kann auch benutzt werden, um eine Norm zu induzieren. Wenn auf einem Vektorraum ein Skalarprodukt gegeben ist, kann daraus direkt eine Norm der Form

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

abgeleitet werden. Diese Norm erfüllt automatisch alle Bedingungen einer Norm, egal welches Skalarprodukt benutzt wird.