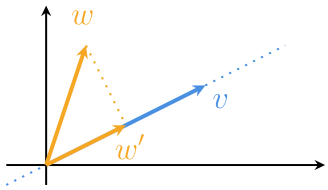
4 Orthonormalbasis

4.1 Orthogonalprojektion

Um die Orthonormalbasis besser zu verstehen, schauen wir uns nochmals die Orthogonalprojektion an. Grundlegend gibt uns die Orthogonalprojektion den Anteil eines Vektors der in dieselbe Richtung eines anderen Vektors zeigt. Oder bildlich:



Hier projizieren wir den Vektor w orthogonal auf den Vektor v. Das Resultat ist der Vektor w'. Mathematisch lässt sich das mit dem Skalarprodukt ausrechnen

$$w' = \frac{\langle w, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\, v.$$

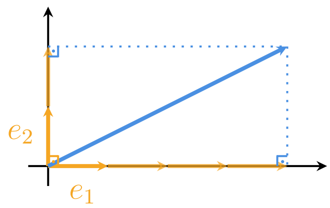
4.2 Orthonormalbasis

Wenn wir eine Basis für einen Vektorraum wählen, ist es vorteilhaft, wenn diese bestimmte Eigenschaften erfüllt. Eine dieser wünschenswerten Eigenschaften ist das die Basis orthonormal ist. Aber was bedeutet es, wenn eine Basis orthonormal ist, und warum ist das wünschenswert?

Bei einer Orthonormalbasis stehen die Basisvektoren senkrecht aufeinander (orthogonal) und haben die Länge 1 (normal). Zum Beispiel ist die Standardbasis

$$\mathcal{E} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

eine Orthonormalbasis. Wenn wir in einer solchen Basis die Koordinaten von einem Vektor v finden wollen, können wir einfach den Vektor orthogonal auf die Basisvektoren projizieren. Nehmen wir Beispielsweise den blauen Vektor v in der folgenden Abbildung:



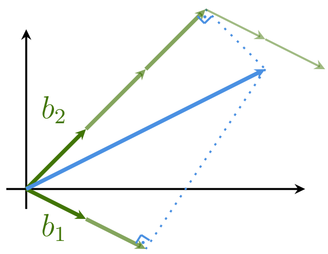
Durch die Orthogonalprojektionen auf die Basisvektoren erhalten wir die Koordinaten von v in der Basis $\mathcal{E}$. In diesem Fall sind die Koordinaten gegeben durch

$$v = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{E}}.$$

Bei einer nicht orthonormalen Basis müssen die Basisvektoren weder orthogonal noch normiert sein. Zum Beispiel

$$\mathcal{B} = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und } b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Versuchen wir nun die Koordinaten desselben Vektors v in dieser Basis $\mathcal{B}$ zu finden. Wieder projizieren wir den Vektor v orthogonal auf die Basisvektoren.



Durch die Orthogonalprojektion erhalten wir die Koordinaten $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$. Diese entsprechen jedoch nicht dem Vektor v.

$$v \neq \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}}.$$

Wenn wir einen Vektor in einer solchen nicht-orthogonalen Basis darstellen wollen, dann können wir nicht einfach orthogonal projizieren. Um die entsprechenden Koordinaten zu finden, müssen wir eine Linearkombination der Basisvektoren finden (LGS lösen).

Für unsere Orthonormalbasis bedeutet das nun folgendes. Sei $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis des Vektorraums V, dann gilt $\forall x \in V$

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

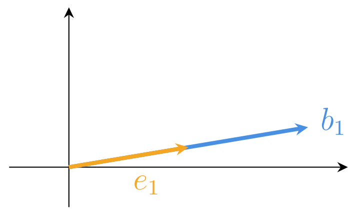
In anderen Worten, können wir jeden Vektor als Linearkombination der Basisvektoren schreiben, wobei die Koeffizienten durch die Orthogonalprojektionen gegeben sind. Um die Koordinaten zu finden, müssen wir kein LGS lösen. Beachte das der Term $\langle e_k, e_k \rangle$ wegfällt, da dieser aufgrund der Normierung immer 1 ist.

4.3 Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren

Aufgrund der oben genannten Eigenschaften wollen wir oft mit Orthonormalbasen arbeiten. Um eine solche Basis zu finden, benutzten wir das Gram Schmidt Orthogonalisierungsverfahren. Dieses Verfahren erlaubt uns aus einer jeder Basis eine Orthonormalbasis zu erstellen. Dafür benötigen wir eine beliebige Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_k\}$ und ein Skalarprodukt, mit welchen wir dann eine Orthonormalbasis $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\}$ erstellen. Im Folgenden gehen wir das Verfahren Schritt für Schritt durch.

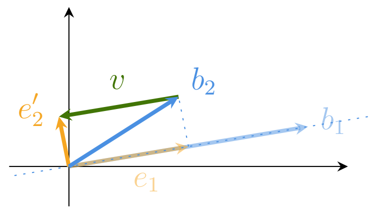
1. Wähle einen beliebigen Basisvektor b_1 und normiere ihn.

$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{b_1}{\sqrt{\langle b_1, b_1 \rangle}}$$



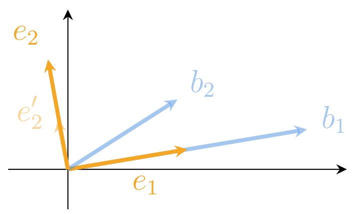
2. Wähle einen zweiten Basisvektor b_2, ziehe zuerst den zu e_1 parallelen Teil ab

$$e_2' = b_2 - \underbrace{\langle b_2, e_1 \rangle e_1}_{v}$$



und normiere ihn dann

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{e_2'}{\sqrt{\langle e_2', e_2' \rangle}}$$



3. Wiederhole für jeden Basisvektor b_i

$$e_i' = b_i - \langle b_i, e_1 \rangle e_1 - \langle b_i, e_2 \rangle e_2 - \ldots - \langle b_i, e_{i-1} \rangle e_{i-1}$$

$$e_i = \frac{e_i'}{\|e_i'\|} = \frac{e_i'}{\sqrt{\langle e_i', e_i' \rangle}}$$

Beispiel Sei auf $\mathcal{P}_4$ das folgende Skalarprodukt gegeben:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\, dx,$$

finde eine Orthonormalbasis für den Vektorraum $span\{1, 3x^4\}$.

Wir benutzten das Gram-Schmidt-Verfahren mit den Basisvektoren $b_1 = 1$ und $b_2 = 3x^4$.

1.
$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{b_1}{\sqrt{\langle b_1, b_1 \rangle}}$$

$$\rightarrow \langle b_1, b_1 \rangle = \int_0^1 1 \cdot 1\, dx = [x]_0^1 = 1$$

$$e_1 = 1$$

2.
$$e_2' = b_2 - \langle b_2, e_1\rangle e_1$$

$$\rightarrow \langle b_2, e_1\rangle = \int_0^1 3x^4 \cdot 1\,dx = \left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{3}{5}$$

$$e_2' = b_2 - \frac{3}{5} = 3x^4 - \frac{3}{5}$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{e_2'}{\sqrt{\langle e_2', e_2'\rangle}}$$

$$\rightarrow \langle e_2', e_2'\rangle = \int_0^1 \left(3x^4 - \frac{3}{5}\right)^2 dx = \int_0^1 9x^8 - \frac{18}{5}x^4 + \frac{9}{25}\,dx$$

$$= \left[x^9 - \frac{18}{25}x^5 + \frac{9}{25}x\right]_0^1 = \frac{16}{25}$$

$$\rightarrow \sqrt{\langle e_2', e_2'\rangle} = \frac{4}{5}$$

$$e_2 = \frac{5}{4}\left(3x^4 - \frac{3}{5}\right) = \frac{15}{4}x^4 - \frac{3}{4}$$

Die Orthonormalbasis ist gegeben durch

$$\mathcal{E} = \left\{1, \frac{15}{4}x^4 - \frac{3}{4}\right\}.$$

Zusammengefasst kann das Gram-Schmidt-Verfahren in einem Kochrezept zusammengefasst werden.

Gram-Schmidt-Verfahren

Für das Gram-Schmidt-Verfahren benötigt man eine beliebige Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_k\}$, sowie ein beliebeiges Skalarprodukt. Daraus lässt sich dann eine Orthonormalbasis $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\}$ erstellen.

1. Wähle einen beliebeigen Basisvektor b_1 und normiere ihn mit der vom Skalarprodukt induzierten Norm.

$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{b_1}{\sqrt{\langle b_1, b_1 \rangle}}$$

2. Wähle einen zwieten Basisvektor b_2, ziehe den zu b_1 parallelen Teil ab un normiere ihn.

$$e_2' = b_2 - \langle b_2, e_1 \rangle e_1$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{e_2'}{\sqrt{\langle e_2', e_2' \rangle}}$$

3. Wiederhole für jeden Basisvektor b_i

$$e_i' = b_i - \langle b_i, e_1 \rangle e_1 - \langle b_i, e_2 \rangle e_2 - \ldots - \langle b_i, e_{i-1} \rangle e_{i-1}$$

$$e_i = \frac{e_i'}{\|e_i'\|} = \frac{e_i'}{\sqrt{\langle e_i', e_i' \rangle}}$$