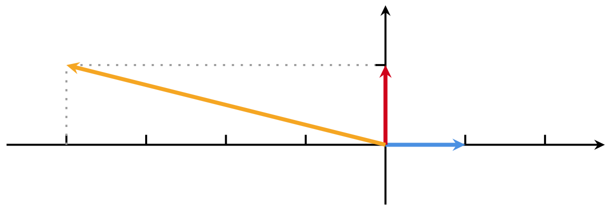
6 Basiswechsel und Diagonalisierung

6.1 Basiswechsel für Vektoren

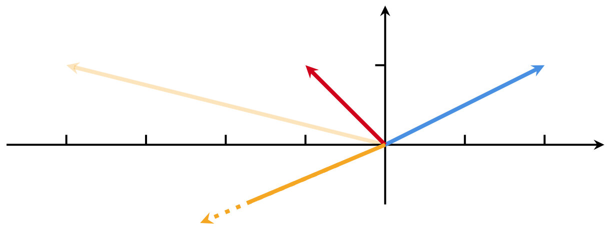
Was bedeutet es nochmal, wenn wir einen Vektor mit den Koordinaten $\begin{bmatrix} -4 & 1 \end{bmatrix}^\top$ beschreiben? Grundlegend beschreiben Koordinaten um wie viel die Basisvektoren des assoziierten Vektorraums skaliert werden. In der Standardbasis ist dies bereits recht intuitiv.

$$-4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



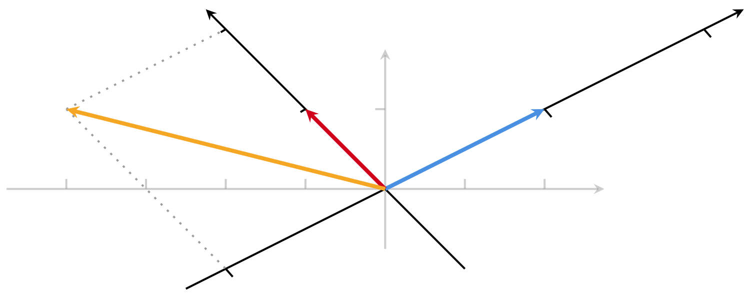
Wir können aber auch eine andere Basis wählen, z.B. gegeben durch die Vektoren $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^\top$ und $\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^\top$. Wenn wir nun dieselben Koordinaten wie in der Standardbasis benutzten, bekommen wir einen anderen Vektor.

$$-4\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Mit den neuen Basisvektoren wären die richtigen Koordinaten für denselben Vektor gegeben durch

$$-1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



In der neuen Basis wird derselbe Vektor durch die Koordinaten $\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}^\top$ beschrieben. D.h. die Koordinaten hängen immer von den Basisvektoren ab. Wenn wir von einer Basis in eine andere wechseln, müssen demnach auch die Koordinaten geändert werden. Dafür führen wir die Übergangsmatrix bzw. Transformationsmatrix ein. Um dieses Konzept besser verstehen zu können betrachten wir zunächst das Beispiel von oben. Seien die zwei Basen gegeben durch:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Wir wollen nun von der Basis $\mathcal{B}$ in die Basis $\mathcal{B}'$ transformieren. Gesucht sind also die Koordinaten eines Vektors $[v]_{\mathcal{B}}$ in der neuen Basis $\mathcal{B}'$. Mathematisch können wir das so ausdrücken:

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'}}_{\text{Beschreiben denselben Vektor}} .$$

Dies können wir in ein LGS in Matrixschreibweise umformen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{:= T_{\mathcal{B}' \mapsto \mathcal{B}}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \Leftrightarrow \quad T_{\mathcal{B}' \mapsto \mathcal{B}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Wir erkennen hier, dass wenn ein Vektor in der Basis $\mathcal{B}'$ mit der Matrix $T_{\mathcal{B}' \mapsto \mathcal{B}}$ multipliziert wird, derselbe Vektor in der Basis $\mathcal{B}$ resultiert. Die Matrix $T_{\mathcal{B}' \mapsto \mathcal{B}}$ transformiert also einen Vektor aus der Basis $\mathcal{B}'$ in die Basis $\mathcal{B}$. Wir suchen jedoch eine Matrix die einen Vektor aus der Basis $\mathcal{B}$ in die Basis $\mathcal{B}'$ transformiert. Dafür können wir einfach die Inverse nehmen:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = T^{-1}_{\mathcal{B}' \mapsto \mathcal{B}} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'}.$$

Die gewünschte Übergangsmatrix ist also gegeben durch:

$$T^{-1}_{\mathcal{B}' \mapsto \mathcal{B}} = T_{\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Basiswechsel für Vektoren

Für beliebige Basen $\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ und $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ gilt:

$$T_{\mathcal{Q} \mapsto \mathcal{W}} = ([q_1]_{\mathcal{W}},\ [q_2]_{\mathcal{W}},\ \ldots,\ [q_n]_{\mathcal{W}})$$

$$[v]_{\mathcal{W}} = T_{\mathcal{Q} \mapsto \mathcal{W}} [v]_{\mathcal{Q}}$$

$$T_{\mathcal{Q} \mapsto \mathcal{W}} = T^{-1}_{\mathcal{W} \mapsto \mathcal{Q}}$$

Beispiel Eine Basis sei gegeben mit $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{S}}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{S}} \right\}$. Transformiere den Vektor $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{\mathcal{S}}$ aus der Standardbasis $\mathcal{S}$ in die Basis $\mathcal{B}$.

Wir suchen also die Übergangsmatrix $T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}} = ([s_1]_{\mathcal{B}}, [s_2]_{\mathcal{B}})$. Die Vektoren $[s_i]_{\mathcal{B}}$ kennen wir nicht, nur die Vektoren $[b_i]_{\mathcal{S}}$ sind bekannt. Damit ist auch die Matrix $T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}$ gegeben.

$$T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}} = ([b_1]_{\mathcal{S}}, [b_2]_{\mathcal{S}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen nun das $T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}} = T^{-1}_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}$. Damit können wir den Vektor v transformieren:

$$[v]_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}}\ [v]_{\mathcal{S}} = T^{-1}_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}\ [v]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

6.2 Basiswechsel für Matrizen

Wir können nun Vektoren von einer Basis in eine andere transformieren. Nun stellt sich die Frage, ob das auch für Matrizen gilt. Denn lineare Abbildungen und deren Darstellungsmatrizen sind auch an eine Basis gebunden. Sei A eine Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung in der Basis $\mathcal{Q}$. Dann gilt:

$$[A]_{\mathcal{Q}}[x]_{\mathcal{Q}} = [y]_{\mathcal{Q}}.$$

Wir suchen nun die Darstellungsmatrix der gleichen Abbildung in einer Basis $\mathcal{W}$. Mathematisch ausgedrückt

$$[A]_{\mathcal{W}}[x]_{\mathcal{W}} = [y]_{\mathcal{W}}.$$

Durch Umformen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
[A]_{\mathcal{Q}}[x]_{\mathcal{Q}} &= [y]_{\mathcal{Q}} && \mid \cdot T_{\mathcal{Q}\mapsto\mathcal{W}} \\
T_{\mathcal{Q}\mapsto\mathcal{W}}[A]_{\mathcal{Q}}[x]_{\mathcal{Q}} &= T_{\mathcal{Q}\mapsto\mathcal{W}}[y]_{\mathcal{Q}} && \mid T_{\mathcal{Q}\mapsto\mathcal{W}}[y]_{\mathcal{Q}} = [y]_{\mathcal{W}} \\
T_{\mathcal{Q}\mapsto\mathcal{W}}[A]_{\mathcal{Q}}[x]_{\mathcal{Q}} &= [y]_{\mathcal{W}} && \mid I = T^{-1}_{\mathcal{Q}\mapsto\mathcal{W}}T_{\mathcal{Q}\mapsto\mathcal{W}} \\
T_{\mathcal{Q}\mapsto\mathcal{W}}[A]_{\mathcal{Q}}T^{-1}_{\mathcal{Q}\mapsto\mathcal{W}}T_{\mathcal{Q}\mapsto\mathcal{W}}[x]_{\mathcal{Q}} &= [y]_{\mathcal{W}} && \mid T_{\mathcal{Q}\mapsto\mathcal{W}}[x]_{\mathcal{Q}} = [x]_{\mathcal{W}} \\
\underbrace{T_{\mathcal{Q}\mapsto\mathcal{W}}[A]_{\mathcal{Q}}T^{-1}_{\mathcal{Q}\mapsto\mathcal{W}}}_{[A]_{\mathcal{W}}}[x]_{\mathcal{W}} &= [y]_{\mathcal{W}}
\end{aligned}$$

Basiswechsel für Matrizen

Für beliebige Basen $\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ und $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ gilt:

$$[A]_{\mathcal{W}} = T_{\mathcal{Q}\mapsto\mathcal{W}}\ [A]_{\mathcal{Q}}\ T^{-1}_{\mathcal{Q}\mapsto\mathcal{W}}$$

Doch warum müssen wir hier zweimal mit einer Transformationsmatrix multiplizieren? Betrachten wir dafür die einzelnen Terme etwas genauer.

$$[A]_{\mathcal{W}}[x]_{\mathcal{W}} = [y]_{\mathcal{W}}$$

$$T_{\mathcal{Q}\mapsto\mathcal{W}}\ [A]_{\mathcal{Q}}\ T^{-1}_{\mathcal{Q}\mapsto\mathcal{W}}\ [x]_{\mathcal{W}} = [y]_{\mathcal{W}}$$

Transformation von $[x]_{\mathcal{W}}$ zu Basis $\mathcal{Q}$

Abbildung von $[x]_{\mathcal{Q}}$ in Basis $\mathcal{Q}$

Rücktransformation von $[y]_{\mathcal{Q}}$ zu Basis $\mathcal{W}$

Beispiel Eine Basis sei gegeben mit $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{S}}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{S}} \right\}$. Transformiere die Matrix $[A]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ aus der Standardbasis $\mathcal{S}$ in die Basis $\mathcal{B}$.

Wir benutzten hier die oben eingeführte Transformationsmatrix in diesem Fall bekommen wir

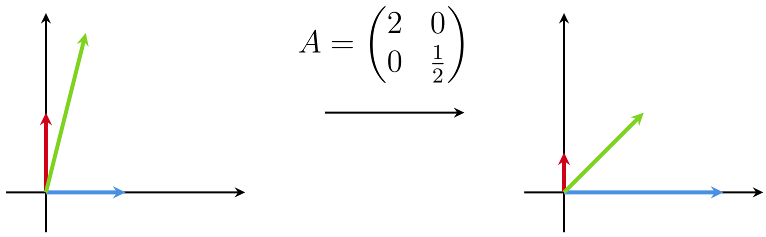
$$\begin{aligned}
[A]_{\mathcal{B}} &= T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}}\ [A]_{\mathcal{S}}\ T^{-1}_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

6.3 Diagonalisieren

Wir wissen nun wie wir von einer Basis zur anderen wechseln können, indem wir Vektoren und Matrizen transformieren. Da lineare Abbildungen durch Matrizen beschrieben werden können, sind wir auch in der Lage lineare Abbildungen von einer Basis in die andere zu transformieren. Für solche Abbildungen ist es vorteilhaft, wenn die dazugehörige Abbildungsmatrix diagonal ist. Denn Diagonalmatrizen sind leicht invertierbar und Matrixmultiplikation ist bedeutend unkomplizierter. Beim sogenannten Diagonalisieren wollen wir einen Basiswechsel durchführen, sodass eine gewünschte Matrix in der neuen Basis diagonal ist. Konkreter wollen wir für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ finden, sodass

$$T^{-1}A\ T = D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n),$$

wobei D die Matrix in der neuen Basis ist. Um die Diagonalisierung durchzuführen, müssen wir demnach die Basis finden in der A diagonal ist. Aber wann ist das der Fall? Nehmen wir nochmals einen Schritt zurück und überlegen uns was der Effekt von diagonalen Matrizen und deren assoziierter Abbildung im zweidimensionalen Raum ist. Im folgenden Beispiel betrachten wir wie eine Diagonalmatrix verschiedene Vektoren im Raum abbildet.



$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Wir erkennen, dass die Basisvektoren (hier die Standardbasis in Blau und Rot) nur skaliert werden, aber nicht Ihre Richtung ändern, genau wie Eigenvektoren. In anderen Worten sind bei Diagonalmatrizen die Eigenvektoren auch die Basisvektoren. Indem wir also die Eigenvektoren der ursprünglichen Matrix als neue Basisvektoren wählen, garantieren wir, dass die Matrix in der neuen Basis diagonal ist. Weiterhin sehen wir, dass die Diagonaleinträge der Matrix genau die Faktoren sind mit denen die Basisvektoren skaliert werden. D.h. die Diagonaleinträge der diagonalisierten Matrix sind die Eigenwerte der ursprünglichen Matrix.

Sei zum Beispiel eine Matrix A in der Standardbasis $\mathcal{S}$ gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Weiter seinen die Eigenwerte und Eigenvektoren von A gegeben durch

$$\lambda_1 = 2, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 1, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Um A zu diagonalisieren suchen wir eine Basis $\mathcal{B}$, in der die Basisvektoren durch die Eigenvektoren v_1, v_2 gegeben sind. Anschliessend benötigen wir nur noch eine Transformationsmatrix, um in die entsprechende Basis zu wechseln. Mit den gegebenen Eigenvektoren können wir bereits die Übergangsmatrix $T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}$ bestimmen, indem wir die Eigenvektoren als Spalten nehmen:

$$T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die diagonalisierte Matrix D ist dann gegeben durch

$$D = T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}^{-1} \, A \, T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix A sind nun auch die Diagonaleinträge der Matrix D. Gleichermassen gilt auch

$$A = T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}} \, D \, T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}^{-1}.$$

Zusammengefasst können wir dies in einem "Kochrezept" aufschreiben.

Diagonalisieren

Um eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zu diagonalisieren ($D = T^{-1}AT$), gehe wie folgt vor:

1. Bestimme die Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren v_i von A.
2. Die Matrix $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ist die diagonalisierte Matrix.
3. Setze die Eigenvektoren als Spalten in die Matrix T ein (**Gleiche Reihenfolge wie bei D!**).
4. Bestimme T^{-1}. Falls Eigenvektoren orthonormal sind, gilt: $T^{-1} = T^{\top}$.