10 Lineare Differentialgleichungssysteme

10.1 Homogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Solche Gleichungen sind bereits aus der Analysis bekannt. Allgemein ist eine solche Differentialgleichung gegeben durch

$$y'(t) = ay(t), \quad a \in \mathbb{R},$$

und der Lösung

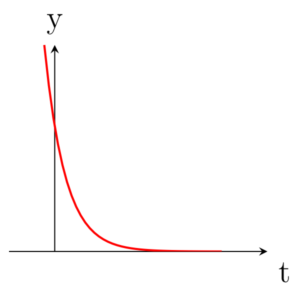
$$y(t) = y(0)\ e^{at}.$$

Wobei $y(0)$ die Anfangsbedingung ist. Ein konkretes Beispiel hierfür ist die Differentialgleichung

$$y'(t) = -2y(t),\ y(0) = 3.$$

Die Lösung ist dann gegeben durch

$$y(t) = y(0)e^{-2t} = 3e^{-2t}.$$



Die Lösungsmenge dieser Differentialgleichung $\{y \in C^1(\mathbb{R}) : y' = ay\}$ ist ein 1-D Unterraum von den 1-mal stetig differenzierbaren Funktionen $C^1(\mathbb{R})$.

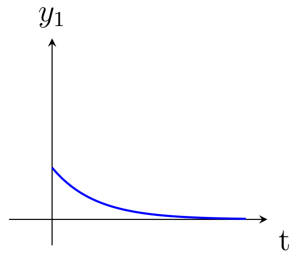
10.2 Systeme homogener linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

In der linearen Algebra I haben wir bereits gesehen wie wir Systeme von Gleichungen lösen und manipulieren können. Das geht auch mit Differentialgleichungen. Ein Beispiel dafür wäre zum Beispiel das Gleichungssystem gegeben durch

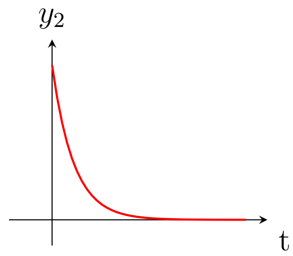
$$\begin{cases} y_1'(t) = -2y_1(t), & y_1(0) = 1 \\ y_2'(t) = -4y_2(t), & y_2(0) = 3. \end{cases}$$

Da beide Gleichungen von unterschiedlichen Variablen abhängen sind sie unabhängig voneinander, solche Systeme nennen wir entkoppelt. In einem solchen entkoppelten System können wir die Differentialgleichungen separat voneinander lösen.

$$y_1(t) = y_1(0)e^{-2t} = e^{-2t}$$



$$y_2(t) = y_2(0)e^{-4t} = 3e^{-4t}$$



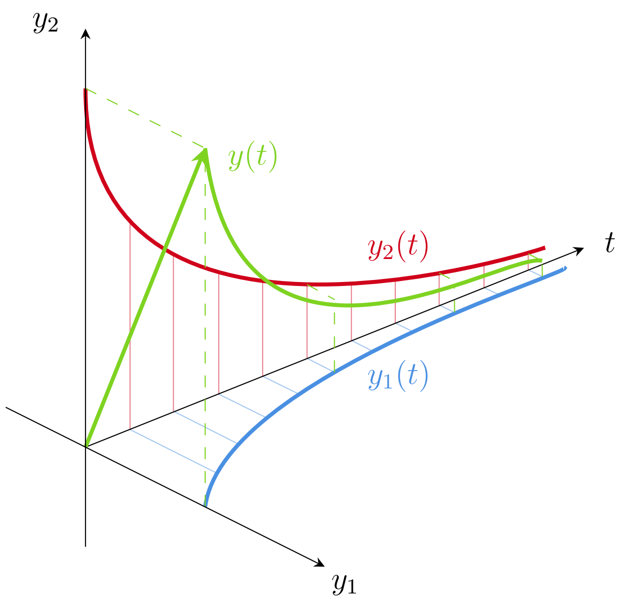
Wie bei den herkömmlichen LGS der Form $Ax = b$, können wir auch dieses System von linearen Differentialgleichungen in Matrixform schreiben bloss, dass die allgemeine Form nun $y' = Ay$ ist. In unserem Fall ergibt sich

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung dieses Systems lässt sich dann als Vektor schreiben:

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 3e^{-4t} \end{pmatrix} = 1 \cdot e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot e^{-4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Grafisch können wir uns die zusammengesetzte Lösung y wie eine Linearkombination von y_1 und y_2 vorstellen, bloss das jetzt alles noch von t abhängt.



Es kann aber auch sein, dass die Differentialgleichungen nicht entkoppelt sind. In dem Fall sind die Gleichungen voneinander abhängig und wir können sie nicht mehr separat lösen. Ein Beispiel dafür wäre das Gleichungssystem

$$\begin{cases} y_1'(t) = -4y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) = -2y_1(t) - 3y_2(t) \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Es stellt sich nun die Frage wie wir ein solches System dennoch lösen können. Betrachten wir dafür nochmals genauer die Matrizen A_1 und A_2 der beiden Systeme

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Wir erkennen, dass die Matrix A_1, des entkoppelten Systems, diagonal ist und die andere nicht. Um nun eine Lösung für das zweite System zu finden, können wir einen Basiswechsel $y = Tz$ durchführen und dadurch die Matrix A_2 diagonalisieren, wodurch das System entkoppelt gelöst werden kann. Wir transformieren also das gesamte Gleichungssystem in die Eigenbasis von A_2. Dafür benötigen wir zunächst die Eigenwerte und Eigenvektoren von A_2. Die Spalten der Transformationsmatrix T sind dann durch die Eigenvektoren gegeben.

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -5, \quad T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun können wir die Transformation durchführen.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \\ y(0) &= \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \xRightarrow{z = T^{-1}y} \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}}_{T^{-1}AT} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \\ z(0) &= \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}}_{T^{-1}y(0)} \end{aligned}$$

In der Basis z können wir das Problem nun wie oben entkoppelt lösen

$$z(t) = \frac{4}{3} \cdot e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} \cdot e^{-5t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

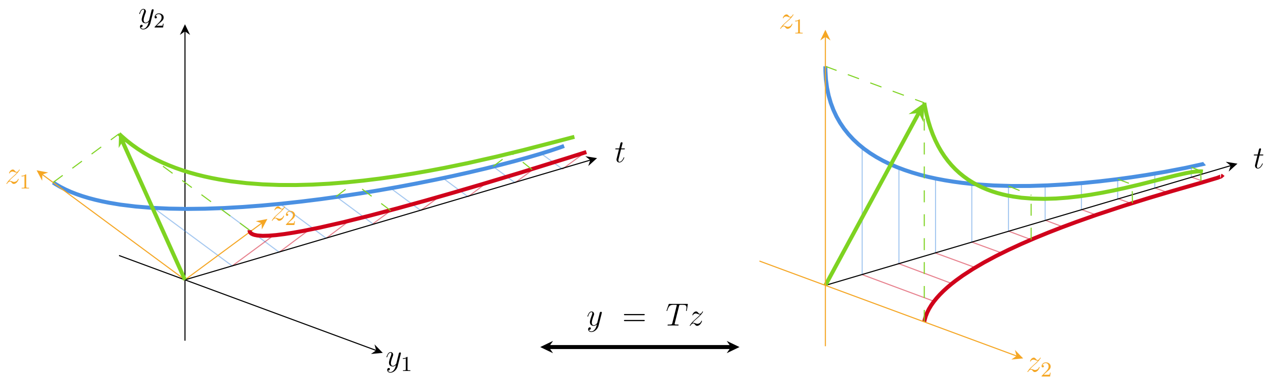
und danach wieder mit $y = Tz$ zurücktransformieren.

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{4}{3} \cdot e^{-2t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} \cdot e^{-5t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{3} \cdot e^{-2t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} \cdot e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\dagger) \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2e^{-2t} + 5e^{-5t} \\ 4e^{-2t} + 5e^{-5t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In der Gleichung (†) erkennen wir, dass die Lösung die Form $y(t) = z_1(0) \cdot e^{\lambda_1 t} v_1 + z_2(0) \cdot e^{\lambda_2 t} v_2$ annimmt, wobei v_1 und v_2 die Eigenvektoren von A_2 sind. Das ist bei Systemen, in denen A diagonalisierbar ist, immer der Fall weswegen wir die allgemeine Lösung immer direkt in der folgenden Form schreiben können:

$$y(t) = z_1(0)v_1e^{\lambda_1 t} + z_2(0)v_2e^{\lambda_1 t} + \ldots + z_n(0)v_ne^{\lambda_n t} \quad (*)$$

Grafisch kann man sich diese Transformation wie folgt vorstellen.



10.2.1 Allgemeine Form Alle Differentialgleichungssysteme von homogenen linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten lassen sich mithilfe von Matrizen schreiben. Die allgemeine Form und Lösung sind gegeben durch

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \ldots = \ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases} \longrightarrow \qquad y'(t) = Ay(t),$$

mit dem Variablen Vektor y und der Matrix A

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Weiterhin ist die Anfangsbedingung $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$ und damit die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y(t) = e^{At}y_0.$$

Um ein solches System zu lösen, müssen wir das Matrixexponential e^{At} auswerten. Das ist im Allgemeinen über die Taylorreihe definiert und ist oft nicht einfach zu berechnen. Jedoch können wir, falls die Matrix A diagonalisierbar ist, das Matrixexponential vereinfachen und auf $(*)$ rückschliessen

$$y(t) = e^{At}y_0 = \underbrace{T\ \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})}_{v_i \cdot e^{\lambda_i}}\ \underbrace{T^{-1}y_0}_{z_i(0)}.$$

Lösen von homogenen linearen Differentialgleichungssystemen

Für die Lösung eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung in der Standardform $y' = Ay$ und den Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$ gehen wir wie folgt vor: (A muss diagonalisierbar sein)

- Diagonalisiere die Matrix $A = TDT^{-1}$ und bestimme die Transformationsmatrix T, sodass $y = Tz$.
- Berechne die Anfangswerte $z(0)$ durch $z(0) = T^{-1}y_0$ oder mit dem LGS $Tz(0) = y_0$.
- Sei $t^{(i)}$ die i-te Spalte von T und d_{ii} der i-te Diagonaleintrag von D. Die Lösung des Systems lautet dann

$$y(t) = z_1(0)t^{(1)}e^{d_{11}t} + z_2(0)t^{(2)}e^{d_{22}t} + \ldots + z_n(0)t^{(n)}e^{d_{nn}t}$$

10.3 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Bis jetzt haben wir nur Differentialgleichungen 1. Ordnung betrachtet, also Gleichungen in denen maximal die erste Ableitung vorkommt. Wie lösen wir jedoch Differentialgleichungen höherer Ordnung? Betrachten wir hierfür die Differentialgleichung 3. Ordnung

$$y''' + 4y'' + 2y' - 3y = 0.$$

Durch eine Substitution können wir die Differentialgleichung in ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung umwandeln. Dafür substituieren wir

$$\begin{aligned} y_0 &:= y \\ y_1 &:= y' \\ y_2 &:= y'' \\ y_3 &:= y''' \end{aligned} \qquad \text{wodurch} \qquad \begin{aligned} y_1 &= y_0' \\ y_2 &= y_1' \\ y_3 &= y_2' \end{aligned}$$

und schreiben die originale Gleichung mit den neuen Variablen y_i, wobei die höchste Ableitung, hier y''', durch eine erste Ableitung, hier y_2', ersetzt wird.

$$y_2' + 4y_2 + 2y_1 - 3y_0 = 0.$$

Damit die Information über die Substitution nicht verloren geht, schreiben wir Sie als weitere Gleichungen in einem System. Daraus resultiert das folgende System

$$\begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = 3y_0 - 2y_1 - 4y_2 \end{cases} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Nun können wir dieses System wie oben beschrieben lösen. Das Resultat y der originalen Gleichung ist dann durch die Lösung für y_0 des Systems gegeben.

10.4 Spezialfall: Differentialgleichungssysteme mit komplexen Eigenwerten

Nehmen wir Beispielsweise die Gleichung

$$x''(t) = -8x(t) + 4x'(t), \quad (\star)$$

welche durch die Substitution

$$\begin{aligned} y_0 &:= x \\ y_1 &:= x' \\ y_2 &:= x'' \end{aligned} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{aligned} y_1 &= y_0' \\ y_2 &= y_1' \end{aligned}$$

in das System

$$\begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = -8y_0 + 4y_1 \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

umgewandelt werden kann. Beachte, dass die Gleichung $(\star)$, 2. Ordnung ist, weswegen der Lösungsraum von $(\star)$ die Dimension 2 haben muss (Intuitiv: Wir müssen zweimal integrieren und haben deswegen zwei Integrationskonstanten bzw. Freiheitsgrade). Um die allgemeine Lösung zu finden, können wir wie oben beschrieben vorgehen. Zuerst bestimmen wir die Eigenwerte

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -8 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0 \quad \to \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm 2i,$$

und Eigenvektoren

$$E_{2+2i}: \left(\begin{array}{cc|c} -2-2i & 1 & 0 \\ -8 & 2-2i & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\frac{-8}{2+2i} \\ + \end{array} \quad \to \quad \left(\begin{array}{cc|c} -2-2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} y_0 = \dfrac{s}{2+2i} \\ y_1 = s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{für } s = 4 \qquad \begin{cases} y_0 = \dfrac{4}{2+2i} \cdot \underbrace{\dfrac{2-2i}{2-2i}}_{=1} = \dfrac{4(2-2i)}{4+4} = 1 - i \\ y_1 = 4 \end{cases}$$

$$E_{2+2i}: \ \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_{2-2i}: \ \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wodurch sich die folgende allgemeine Lösung des Systems ergibt

$$y(t) = e^{(2+2i)t} \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix} + e^{(2-2i)t} \begin{pmatrix} 1+i \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Diese Lösung ist jedoch komplex. Normalerweise wollen wir aber eine reelle Lösung. Um eine reelle Lösung zu erhalten, benutzten wir die Eulersche Formel $re^{i\phi} = r\cos(\phi) +$

$i\ r\sin(\phi)$. Um die Notation folgend zu vereinfachen betrachten, wir nur einen der beiden Eigenvektoren der Lösung (wenn man beide betrachtet kommt man auf das gleiche Ergebnis nur mit mehr Notation, am Ende findest du die Alternative mit beiden).

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{(2+2i)t}\begin{pmatrix}1-i\\4\end{pmatrix} = e^{2t}e^{2it}\begin{pmatrix}1-i\\4\end{pmatrix} \\ &= e^{2t}\left(\cos(2t)+i\sin(2t)\right)\begin{pmatrix}1-i\\4\end{pmatrix} \\ &= e^{2t}\left\{\begin{pmatrix}\cos(2t)+i\sin(2t)-i\cos(2t)-\sin(2t)\\4\cos(2t)+4i\sin(2t)\end{pmatrix}\right\} \\ &= e^{2t}\left\{\begin{pmatrix}\cos(2t)+\sin(2t)\\4\cos(2t)\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}\sin(2t)-\cos(2t)\\4\sin(2t)\end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Für den letzten Schritt benutzten wir ein Korollar aus der Vorlesung welches besagt, dass wenn y eine komplexe Lösung eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems $y' = Ay$ ist, so sind $\mathrm{Re}(y)$ und $\mathrm{Im}(y)$ ebenfalls Lösungen des Systems. $\mathrm{Re}(y)$ und $\mathrm{Im}(y)$ sind hier weiterhin linear unabhängig und bilden dadurch eine Basis des Lösungsraums von y. So lässt sich eine allgemeine Lösung auch als Linearkombination von $\mathrm{Re}(y)$ und $\mathrm{Im}(y)$ schreiben

$$y(t) = e^{2t}\left\{a\begin{pmatrix}\cos(2t)+\sin(2t)\\4\cos(2t)\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\sin(2t)-\cos(2t)\\4\sin(2t)\end{pmatrix}\right\}.$$

Da wir eigentlich eine Lösung für $(\star)$ suchen und durch die Substitution $x = y_0$ substituiert wurde, nehmen wir nur die erste Zeile des Vektors $y(t)$.

$$\begin{aligned} x(t) = y_0(t) &= e^{2t}\left\{a(\cos(2t)+\sin(2t))+b(\sin(2t)-\cos(2t))\right\} \\ &= e^{2t}\left\{(a-b)\cos(2t)+(a+b)\sin(2t)\right\} \\ &= e^{2t}\left\{c_1\cos(2t)+c_2\sin(2t)\right\}. \end{aligned}$$

10.4.1 Alternative Lösung mit beiden Eigenvektoren: Anstatt nur einen der beiden Eigenvektoren zu benutzen, können wir auch beide benutzen. Das Resultat ist das gleiche, jedoch mit mehr Notationsaufwand.

$$
\begin{aligned}
y(t) &= c_3 \cdot e^{(2+2i)t} \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix} + c_4 \cdot e^{(2-2i)t} \begin{pmatrix} 1+i \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= e^{2t} \left\{ c_3 \left(\cos(2t) + i\sin(2t)\right) \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix} + c_4 \left(\cos(2t) - i\sin(2t)\right) \begin{pmatrix} 1+i \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \\
&= e^{2t} \begin{pmatrix} c_3\cos(2t) + c_3 i\sin(2t) - c_3 i\cos(2t) - c_3\sin(2t) + c_4\cos(2t) - c_4 i\sin(2t) + c_4 i\cos(2t) - c_4\sin(2t) \\ 4c_3\cos(2t) + 4c_3 i\sin(2t) + 4c_4\cos(2t) - 4c_4 i\sin(2t) \end{pmatrix} \\
&= e^{2t} \begin{pmatrix} (c_3+c_4)\cos(2t) + (c_3-c_4)i\sin(2t) - (c_3-c_4)i\cos(2t) + (c_3+c_4)\sin(2t) \\ 4(c_3+c_4)\cos(2t) + 4(c_3-c_4)i\sin(2t) \end{pmatrix} \\
&= e^{2t} \left\{ \begin{pmatrix} (c_3+c_4)\cos(2t) + (c_3+c_4)\sin(2t) \\ 4(c_3+c_4)\cos(2t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} (c_3-c_4)\sin(2t) - (c_3-c_4)\cos(2t) \\ 4(c_3-c_4)\sin(2t) \end{pmatrix} \right\} \\
&= e^{2t} \left\{ a \begin{pmatrix} \cos(2t) + \sin(2t) \\ 4\cos(2t) \end{pmatrix} + i\ b \begin{pmatrix} \sin(2t) - \cos(2t) \\ 4\sin(2t) \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

womit wir schliesslich durch dieselbe Argumentation von oben die Lösung für $(\star)$ finden

$$
\begin{aligned}
x(t) = y_0(t) &= e^{2t} \left\{ a(\cos(2t) + \sin(2t)) + b(\sin(2t) - \cos(2t)) \right\} \\
&= e^{2t} \left\{ (a-b)\cos(2t) + (a+b)\sin(2t) \right\} \\
&= e^{2t} \left\{ c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) \right\}.
\end{aligned}
$$