



ANALYSIS II

Übungsstunde IV

- Intuationsübung
- Nachbesprechung Serie 2
- Vorlesungsstoff
 - Koordinatentransformationen
 - Gebietsintegrale
 - Polarkoordinaten & Zylinderkoordinaten

Ablauf

Multiple Choice Frage 3

Sei $f(x, y) = \frac{1}{x \cdot y}$. Dann ist die Ableitung der in einer Umgebung von $x = 2$

durch $f(x, \varphi(x)) = f(2, 1)$ definierten Funktion φ gegeben durch

$$\varphi'(2) = \text{[]}$$

Prüfen

Satz. Die Tangentensteigung an die Kurve $K : f(x, y) = 0$ an der Stelle (x_0, y_0) lautet:

$$\varphi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}.$$

Aufgabe 1

1. (a) (♥) Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) := xy(2x - 5y)$$

im abgeschlossenen Quadrat mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 0)$. Berechnen Sie die globalen Extremastellen von f in diesem Quadrat.

Zu untersuchende Stellen:

- Extrema im Inneren des Gebiets $\rightarrow \text{grad}(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Kandidaten auf dem Rand des Gebiets $\rightarrow$ Parametrisierung $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
- Eckpunkte des Gebiets
- Definitionslücken der partiellen Ableitungen

Koordinatentransformationen

- Verallgemeinerte Kettenregel für Parametrisierungen in mehreren Variablen

Funktion $f(x, y)$ & Parametrisierung $x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi)$

$$\tilde{f}_\rho(\rho, \varphi) = f_x \cdot x_\rho + f_y \cdot y_\rho$$

$$\tilde{f}_\varphi(\rho, \varphi) = f_x \cdot x_\varphi + f_y \cdot y_\varphi$$

- Matrix Schreibweise:

$$(f_\rho \quad f_\varphi) = (f_x \quad f_y) \cdot \begin{pmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{pmatrix}$$

Gebietsintegrale

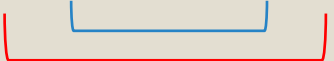
Definition. Das **Gebietsintegral** V der Funktion f über das Gebiet

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [\alpha, \beta], y \in [\gamma(x), \delta(x)]\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [\gamma, \delta], x \in [\alpha(y), \beta(y)]\}$$

ist gegeben durch

$$V = \iint_B f(x, y) \, dF = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x, y) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} = \int_{\gamma}^{\delta} \int_{\alpha(\mathbf{y})}^{\beta(\mathbf{y})} f(x, y) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y}.$$

Beispiel:

$$V = \int_0^1 \int_{2x-2}^{2-2x} x^2 + y^2 \, dy \, dx$$


Volumenintegrale

Definition. Das **Volumenintegral** V der Funktion f über die Menge B ist gegeben durch

$$V = \iiint_B f(x, y, z) \, dV.$$

- Volumenelement in kartesischen Koordinaten: $dV = dx \cdot dy \cdot dz$

Anwendungen Gebietsintegrale

- Fläche F : $F = \iint 1 \cdot dF$
- Gesamtmasse M : $M = \iint \rho(x, y) \cdot dF$
- Schwerpunktskoord. x_s , y_s : $x_s = \frac{1}{F} \cdot \iint x \cdot dF, \quad y_s = \frac{1}{F} \cdot \iint y \cdot dF$
- Flächenträgheitsmoment: $J_0 = \iint (x^2 + y^2) \cdot dF$
- Pol. Flächenträgheitsmoment $J_0 = \iint r^3 \cdot d\rho \, d\varphi$

Beispielaufgabe BP Winter 2018

1. **Single Choice.** Es sei

$$K_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

eine Kreisscheibe mit Radius $R > 0$ und es sei J_0 das polare Flächenträgheitsmoment (d.h. bezüglich der z -Achse) der Kreisscheibe K_R bezüglich des Koordinatenursprungs.

Wie gross ist das polare Flächenträgheitsmoment der Kreisscheibe $K_{2R} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq (2R)^2\}$ bezüglich des Koordinatenursprungs?

- (a) $16J_0$
- (b) $2J_0$
- (c) $4J_0$

Pol. Flächenträgheitsmoment $J_0 = \iint r^3 \cdot d\rho \, d\varphi$

Anwendung Volumenintegrale

- Volumen V :
$$V = \iiint 1 \cdot dV$$
- Gesamtmasse M .
$$M = \iiint \rho(x, y, z) dV$$
- Trägheitsmoment θ (hom. Körper)
$$\theta = \rho \cdot \iiint (x^2 + y^2) dV$$
- Trägheitsmoment θ (inhom. Körper)
$$\theta = \iiint (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z) dV$$

Polarkoordinaten

◦ Transformation der Variablen:

➤ $x = r \cdot \cos(\varphi)$

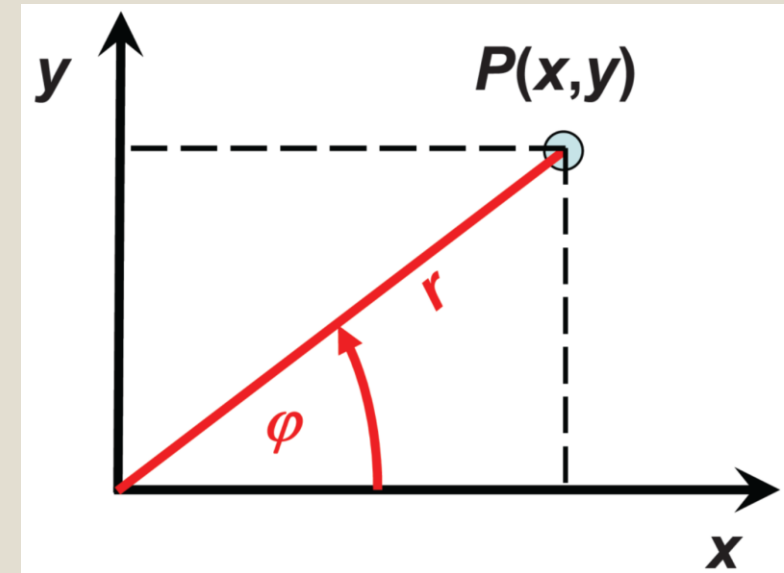
➤ $y = r \cdot \sin(\varphi)$

➤ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

➤ $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{\rho_0}^{\rho_1} f(\rho, \varphi) \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$$

Flächenelement $dF = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$



Zylinderkoordinaten

- Identisch zu den Polarkoordinaten, aber zusätzliche z-Komponente (Höhe des Zylinders)

- $x = r \cdot \cos(\varphi)$

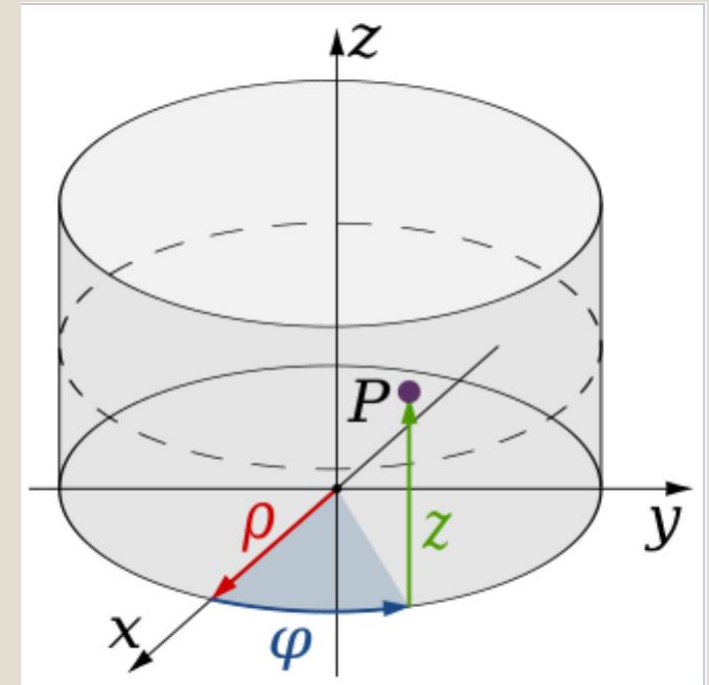
- $y = r \cdot \sin(\varphi)$

- $z = z$

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

- $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Flächenelement $dF = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$



Beispielaufgabe Basisprüfung BP Sommer 2017

Offene Aufgabe. Es bezeichne

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 3\} \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$$

die Oberfläche eines halboffenen Zylinders. Weiter sei $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch $\vec{v}(x, y, z) = (\cos(y), \sin^2(x), z^2 - 6)$.

- ➔ (a) Die Fläche S kann mit der Kreisscheibe aus der SC-Frage geschlossen werden. Berechnen Sie das Volumen des dadurch entstehenden Zylinders.
- (b) Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{v}$.
- (c) Berechnen Sie den Fluss

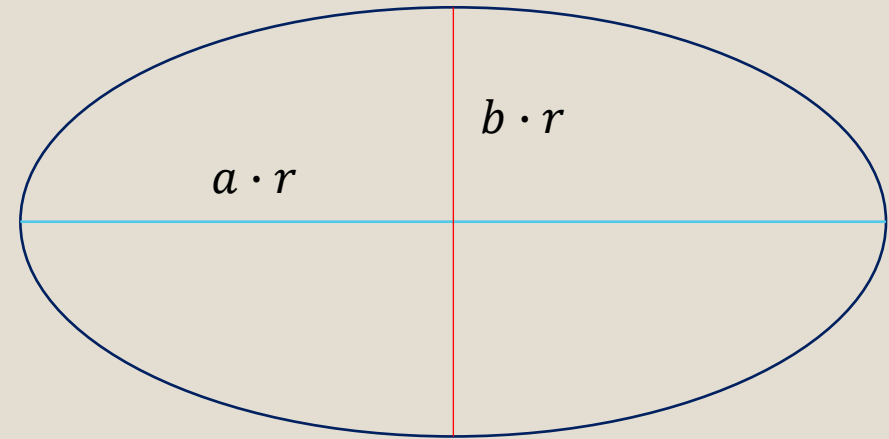
$$\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

aus S heraus.

Ellipsenkoordinaten

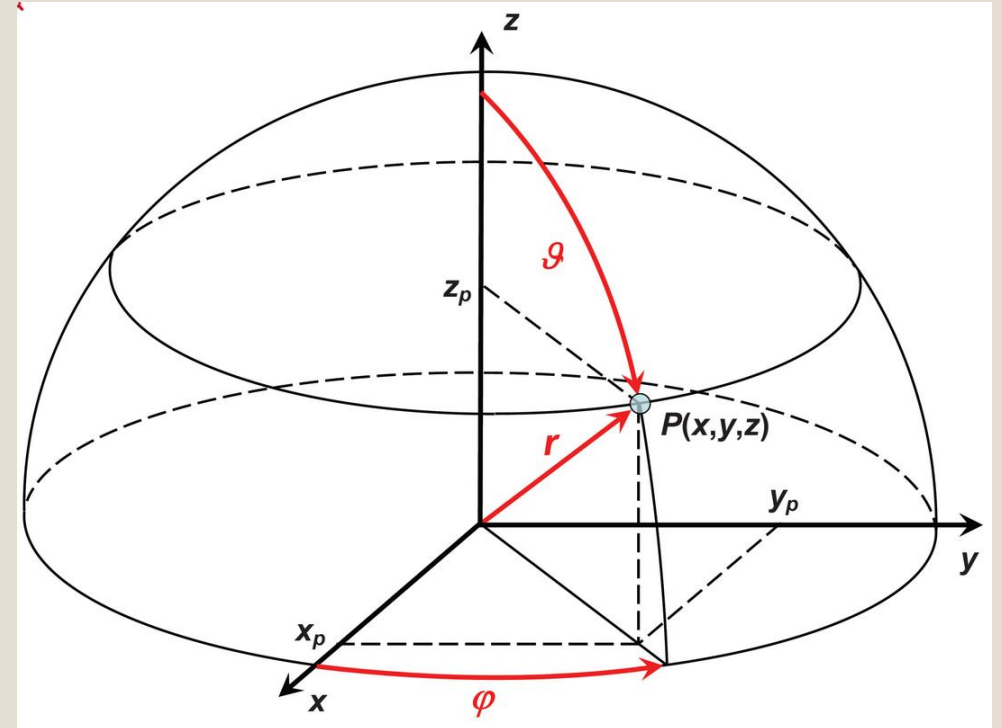
- $x = a \cdot r \cdot \cos(\varphi)$
- $y = b \cdot r \cdot \sin(\varphi)$
- Flächen-/Volumenelement
- $dA = abr \cdot dr \cdot d\varphi$
- $dV = abr \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$ (Elliptischer Zylinder)

Ellipsengleichung: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$



Kugelkoordinaten

- $x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)$
- $y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi)$
- $z = r \cdot \cos(\theta)$
- Volumenelement $dV = r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot dr$
- Durch Konvention: $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$



- Durch welches Volumenintegral wird das Kugelvolumen $V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3$ beschrieben?

Jacobi-Determinante

- Wie findet man das Flächen oder Volumenelement für eine unbekannte Transformation?

Transformation: $u(x, y), \quad v(x, y)$

➡ Determinate der Jacobi-Matrix: $\det(J) = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$

$$dF = \det(J) \cdot du \cdot dv$$