ANALYSIS II

Übungsstunde IV

Ablauf

- Intuitionsübung
- Nachbesprechung Serie 2
- Vorlesungsstoff
  - Koordinatentransformationen
  - Gebietsintegrale
  - Polarkoordinaten & Zylinderkoordinaten

Multiple Choice Frage 3

Sei $f(x,y) = \dfrac{1}{x \cdot y}$. Dann ist die Ableitung der in einer Umgebung von $x = 2$ durch $f(x, \varphi(x)) = f(2,1)$ definierten Funktion φ gegeben durch

$\varphi'(2) =$

Prüfen

Satz. *Die Tangentensteigung an die Kurve* $K : f(x,y) = 0$ *an der Stelle* (x_0, y_0) *lautet:*

$$\varphi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}.$$

Aufgabe 1

1. (a) (♥) Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) := xy\,(2x-5y)$$

im abgeschlossenen Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$,$(2,0)$. Berechnen Sie die globalen Extremastellen von f in diesem Quadrat.

Zu untersuchende Stellen:

- Extrema im Inneren des Gebiets $\longrightarrow grad(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Kandidaten auf dem Rand des Gebiets $\longrightarrow$ Parametrisierung $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
- Eckpunkte des Gebiets
- Definitionslücken der partiellen Ableitungen

Koordinatentransformationen

- Verallgemeinerte Kettenregel für Parametrisierungen in mehreren Variablen

Funktion $f(x, y)$ & $Parametrisierung\ \ x(\rho, \varphi)\ , y(\rho, \varphi)$

$$\widetilde{f_\rho}(\rho, \varphi) = f_x \cdot x_\rho + f_y \cdot y_\rho$$

$$\widetilde{f_\varphi}(\rho, \varphi) = f_x \cdot x_\varphi + f_y \cdot y_\varphi$$

- Matrix Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} f_\rho & f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{pmatrix}$$

Gebietsintegrale

Definition. Das **Gebietsintegral** V der Funktion f über das Gebiet

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [\alpha,\beta], y \in [\gamma(x),\delta(x)]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [\gamma,\delta], x \in [\alpha(y),\beta(y)]\}$$

ist gegeben durch

$$V = \iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}F = \int_\alpha^\beta \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_\gamma^\delta \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Beispiel:

$$V = \int_0^1 \int_{2x-2}^{2-2x} x^2 + y^2 \, dy \, dx$$

Volumenintegrale

Definition. Das **Volumenintegral** V **der Funktion** f **über die Menge** B ist gegeben durch

$$V = \iiint_B f(x, y, z)\, \mathrm{d}V.$$

- Volumenelement in kartesischen Koordinaten: $\mathrm{dV} = dx \cdot dy \cdot dz$

Anwendungen Gebietsintegrale

- Fläche F : $F = \iint 1 \cdot dF$
- Gesamtmasse M: M$= \iint \rho(x, y) \cdot dF$
- Schwerpunktskoord. x_s , y_s: $x_s = \frac{1}{F} \cdot \iint x \cdot dF, \quad y_s = \frac{1}{F} \cdot \iint y \cdot dF$
- Flächentträgheitsmoment: $J_0 = \iint (x^2 + y^2) \cdot dF$
- Pol. Flächenträgheitsmoment $J_0 = \iint r^3 \cdot d\rho \, d\varphi$

Beispielaufgabe BP Winter 2018

1. **Single Choice.** Es sei

$$K_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

eine Kreisscheibe mit Radius $R > 0$ und es sei J_0 das polare Flächenträgheitsmoment (d.h. bezüglich der z-Achse) der Kreisscheibe K_R bezüglich des Koordinatenursprungs.

Wie gross ist das polare Flächenträgheitsmoment der Kreisscheibe $K_{2R} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq (2R)^2\}$ bezüglich des Koordinatenursprungs?

(a) $16J_0$

(b) $2J_0$

(c) $4J_0$

Pol. Flächenträgheitsmoment $\quad J_0 = \iint r^3 \cdot d\rho \, d\varphi$

Lösungen SC BP Winter 2018

- Für eine Kreisscheibe mit Radius R ergibt sich das Integral $\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^3 \cdot dr \cdot d\varphi = \frac{2\pi}{4} \cdot R^4$
- Für eine Kreisscheibe mit Radius 2R ergibt sich das Integral $\int_0^{2\pi}\int_0^{2R} r^3 \cdot dr \cdot d\varphi = \frac{2\pi}{4} \cdot (2R)^4$
- Die Beiden Ergebnisse unterscheiden sich um den Faktor $2^4 = 16$. Damit stimmt a)

Anwendung Volumenintegrale

- Volumen V: $V = \iiint 1 \cdot dV$
- Gesamtmasse M. $\mathrm{M} = \iiint \rho(x, y, z)\, dV$
- Trägheitsmoment θ (hom. Körper) $\theta = \rho \cdot \iiint (x^2 + y^2)\, dV$
- Trägheitsmoment θ (inhom. Körper) $\theta = \iiint (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z)\, dV$

Polarkoordinaten

- Transformation der Variablen:
  - $x = r \cdot \cos(\varphi)$
  - $y \;= r \cdot \sin(\varphi)$
  - $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{\rho_0}^{\rho_1} f(\rho, \varphi) \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$$

Flächenelement $dF = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$

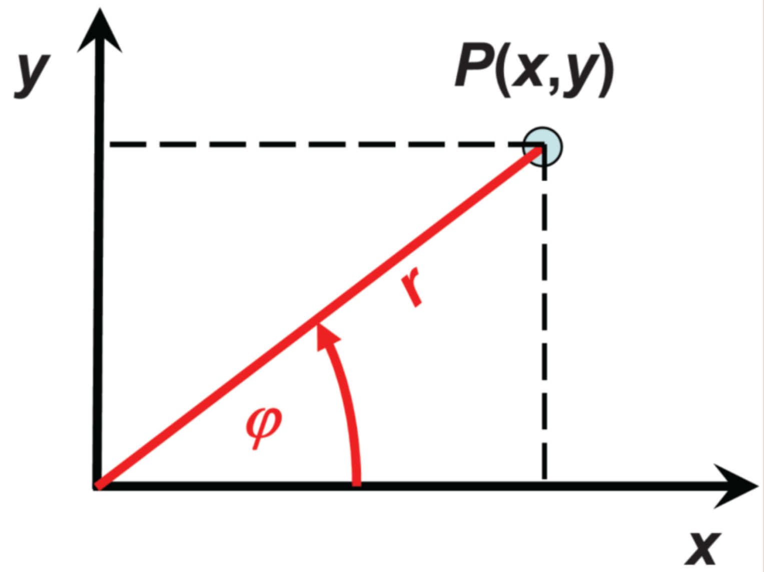


Abb. https://seos-project.eu/laser-rs/laser-rs-c03-s01-p01.de.html

Zylinderkoordinaten

- Identisch zu den Polarkoordinaten, aber zusätzliche z-Komponente (Höhe des Zylinders)
  - $x = r \cdot \cos(\varphi)$
  - $y = r \cdot \sin(\varphi)$
  - z = z
  - $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$

Flächenelement $dF = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$

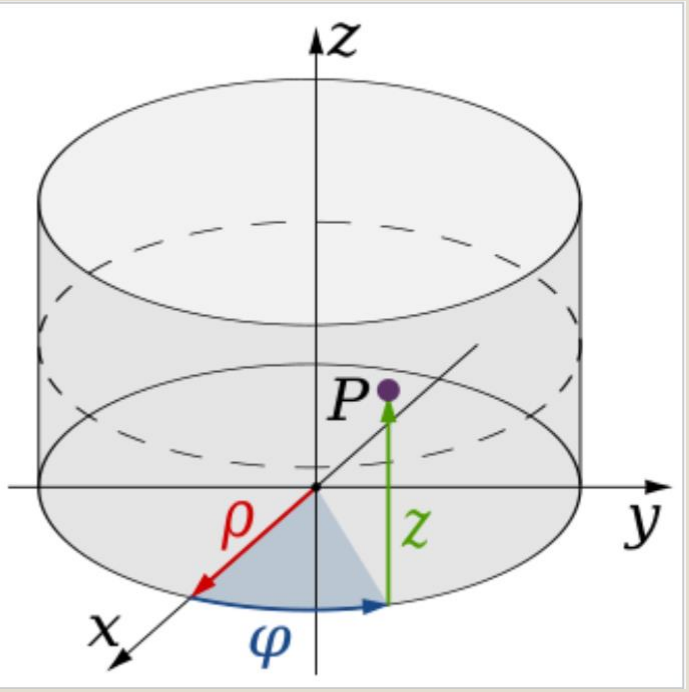


Abb. https://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten

Beispielaufgabe Basisprüfung BP Sommer 2017

Offene Aufgabe. Es bezeichne

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 3\} \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$$

die Oberfläche eines halboffenen Zylinders. Weiter sei $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch $\vec{v}(x, y, z) = (\cos(y), \sin^2(x), z^2 - 6)$.

(a) Die Fläche S kann mit der Kreisscheibe aus der SC-Frage geschlossen werden. Berechnen Sie das Volumen des dadurch entstehenden Zylinders.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{v}$.

(c) Berechnen Sie den Fluss

$$\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

aus S heraus.

Lösung: Es handelt sich um eine Zylinder mit Radius 1 und Höhe 3. Das Integral lautet:

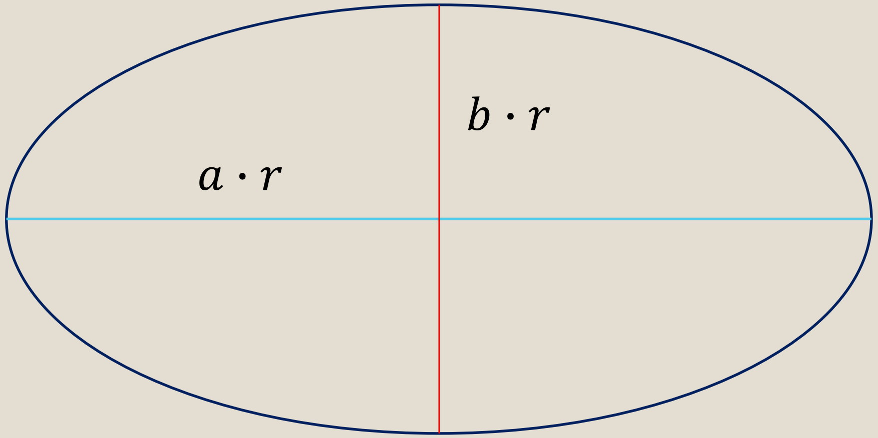
$$V_z = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^1 1 \cdot r \cdot dr \cdot dz \cdot d\varphi = 3\pi$$

Ellipsenkoordinaten

- $x = a \cdot r \cdot \cos(\varphi)$
- $y = b \cdot r \cdot \sin(\varphi)$

- Flächen-/Volumenelement
- $dA = abr \cdot dr \cdot d\varphi$
- $dV = abr \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$ (Elliptischer Zylinder)

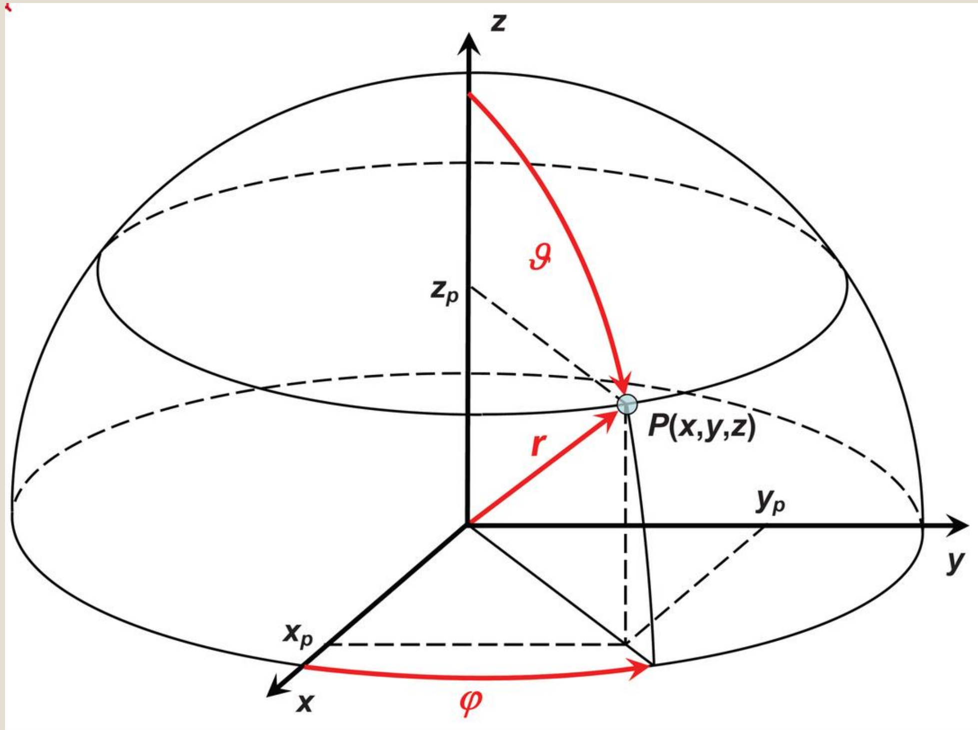
Ellipsengleichung: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$



Kugelkoordinaten

- $x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)$
- $y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi)$
- $z = r \cdot \cos(\theta)$
- Volumenelement $\mathrm{d}V = r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot dr$

- Durch Konvention: $\varphi \, \epsilon \, [0, 2\pi]$, $\phi \, \epsilon \, [0, \pi]$



- Durch welches Volumenintegral wird das Kugelvolumen $V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3$ beschrieben?

Lösung: $V_K = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} 1 \cdot r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta$

Abb. https://seos-project.eu/laser-rs/laser-rs-c03-s01-p01.de.html

Jacobi-Determinante

- Wie findet man das Flächen oder Volumenelement für eine unbekannte Transformation?

Transformation: $u(x,y), \quad v(x,y)$

$\Rightarrow$ Determinate der Jacobi-Matrix: $\det(J) = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$

$$dF = \det(J) \cdot du \cdot dv$$