ANALYSIS II

Übungsstunde V

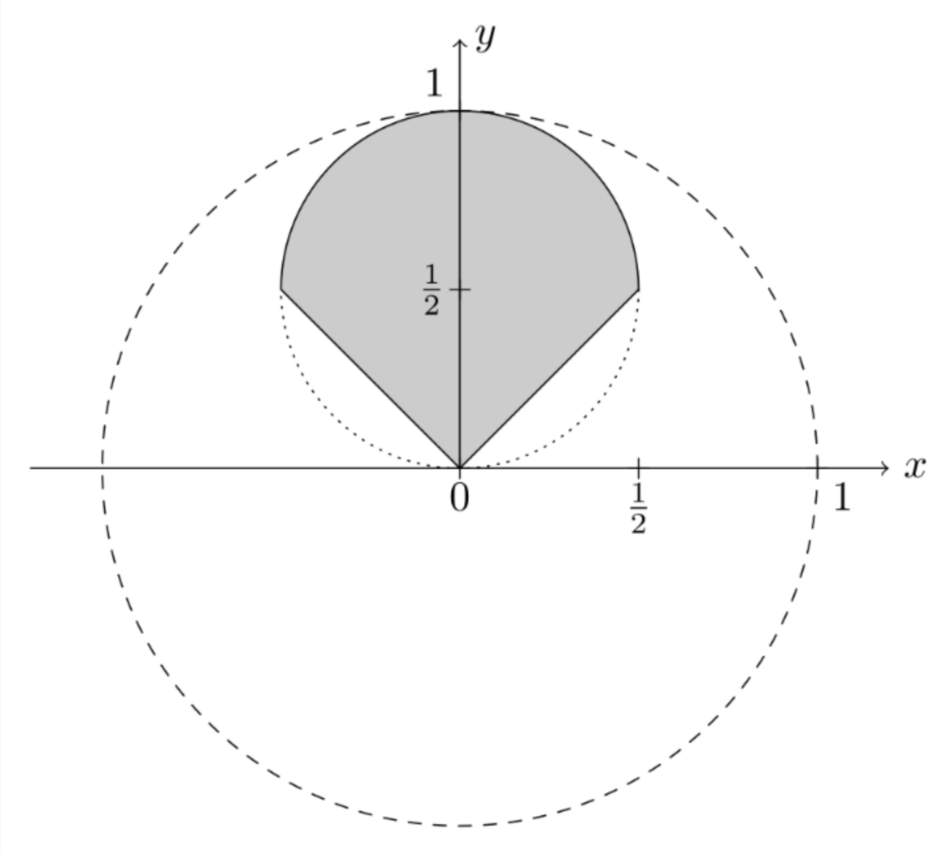
Ablauf

- Intuitionsübung
- Nachbesprechung Serie 3
- Integrale mit Parameter
- Übung Mehrdimensionale Integrale
- Vektoranalysis
- Evaluation

EVALUATION

Intuitionsübung

Sei B der grau gekennzeichnete Bereich in der xy-Ebene:



Die vollständige Aufgabe (die hier nicht gefragt ist) würde lauten: "Man bestimme den Volumeninhalt des Teils der Einheitskugel mit Mittelpunkt im Ursprung, der über B liegt." Dies ist natürlich etwas aufwendig für unsere kurzen Intuitionsübungen. Wir wollen uns um die Strategie kümmern und stellen die folgende **Aufgabe für die folgenden 3 Minuten:**

1. Entscheiden Sie sich für ein geeignetes Koordinatensystem, in dem sich die geometrischen Bedingungen gut ausdrücken lassen.
2. Stellen Sie für den Volumeninhalt ein mehrfaches Integral in Ihrem Koordinatensystem auf.

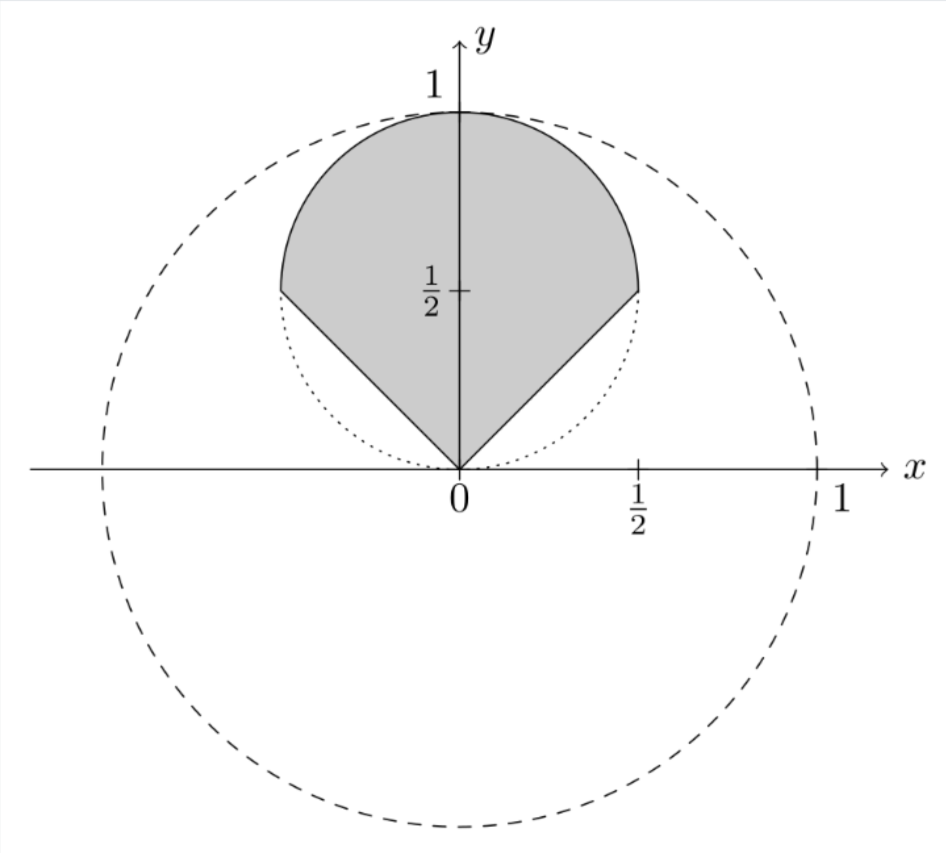
Falls Sie in der Zeit nicht fertig werden, können Sie im nächsten Schritt weiter daran arbeiten - Kein Problem. Aber: Fahren Sie erst dann mit der nächsten Seite dieses Quizzes fort, wenn Sie die Anweisung dazu erhalten!

Unterbrechen Sie Ihre Lösungsarbeit und nehmen Sie sich **1 Minute Zeit zur Beantwortung folgender Fragen**:

1. Wie viele Dimensionen hat Ihr Koordinatensystem bzw. das Integral, das Sie damit aufstellen?
2. Welches Koordinatensystem haben Sie gewählt? (Zum Beispiel Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten, Polarkoordinaten, ...)

Fahren Sie erst dann mit der nächsten Seite fort, wenn Sie die Anweisung dazu erhalten!

Sei B der grau gekennzeichnete Bereich in der xy-Ebene:



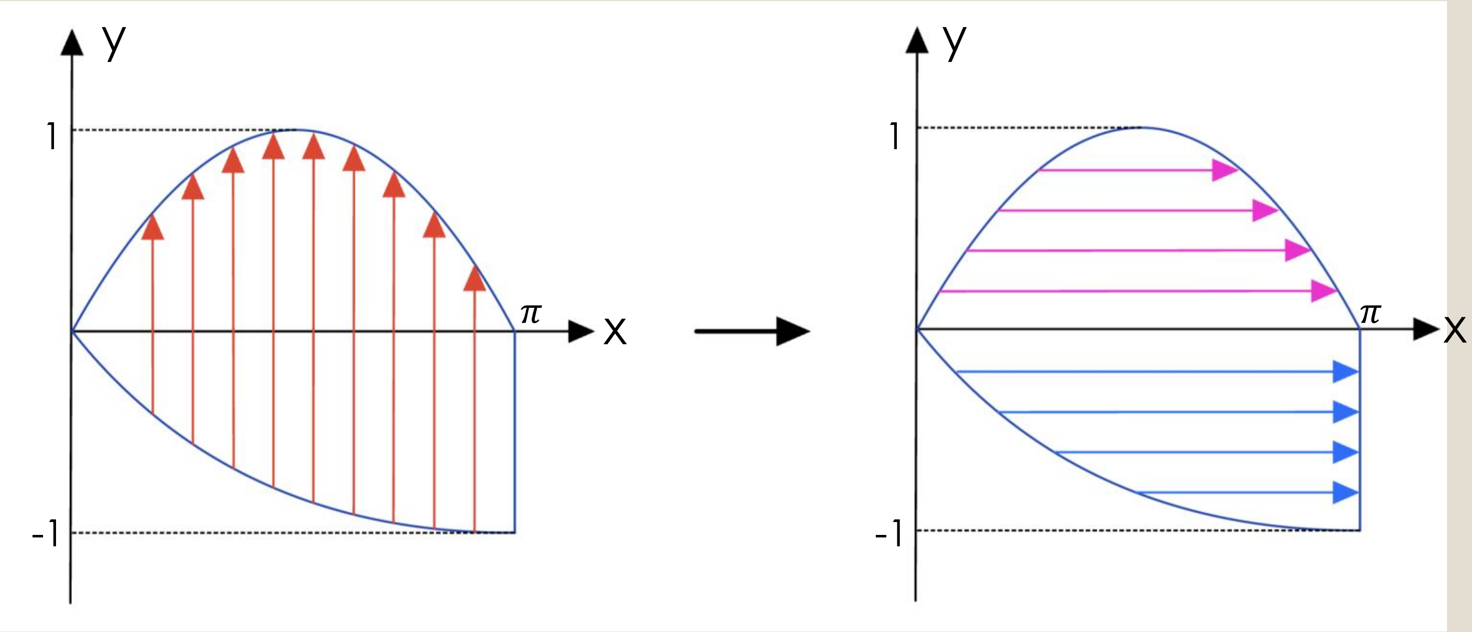
Nehmen Sie sich erneut **3 Minuten Zeit** und diskutieren Sie mit der Person neben Ihnen, welches Koordinatensystem wohl am ehesten zum Erfolg führt. Finden Sie ausserdem ein mehrfaches Integral, welches den Volumeninhalt berechnet und das ausserdem auf den ersten Blick gut ausrechenbar ist.

(Hinweis: Wir haben in der Vorlesung ein ähnliches Beispiel betrachtet!)

Nachbesprechung Serie 3

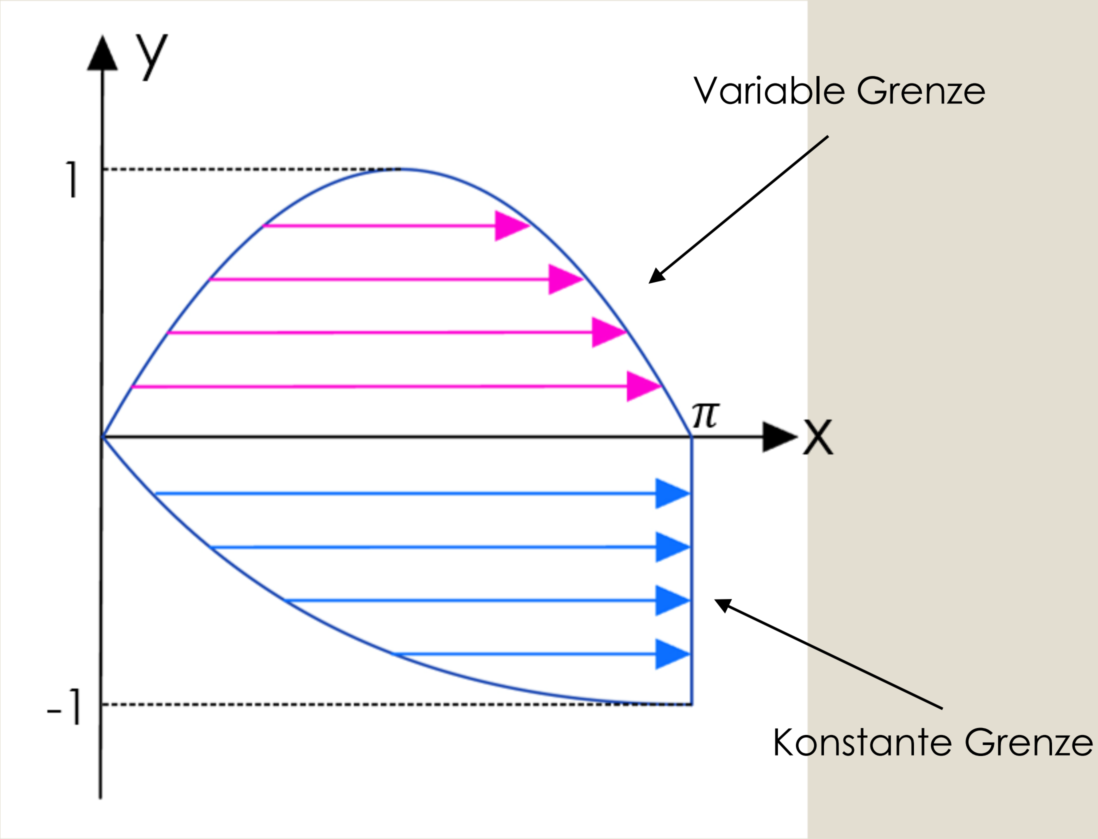
- Aufgabe 2b)

$$\text{(b)} \quad \int_0^{\pi} \int_{-\sin(x/2)}^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$



Integral in zwei Teile aufspalten:

$$\int_{-1}^{0}\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\cdot dx\,dy + \int_{0}^{1}\int_{k(y)}^{l(y)} f(x,y)\cdot dx\,dy$$

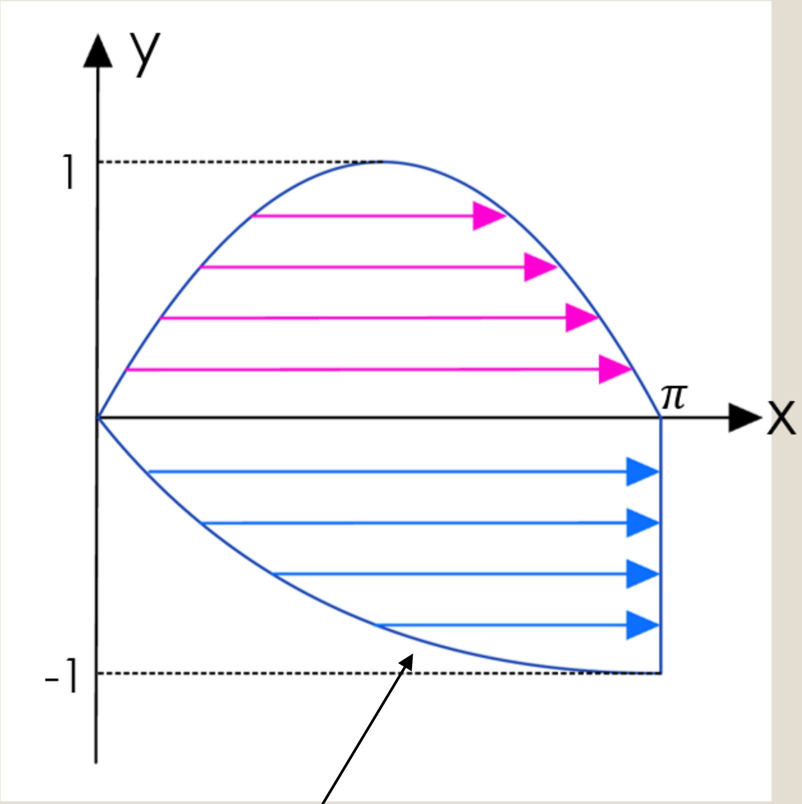


Untere Funktion

Untere Funktion nach y umformen:

$$y = -\sin\left(\frac{x}{2}\right) \iff x = -2 \cdot \arcsin(y)$$

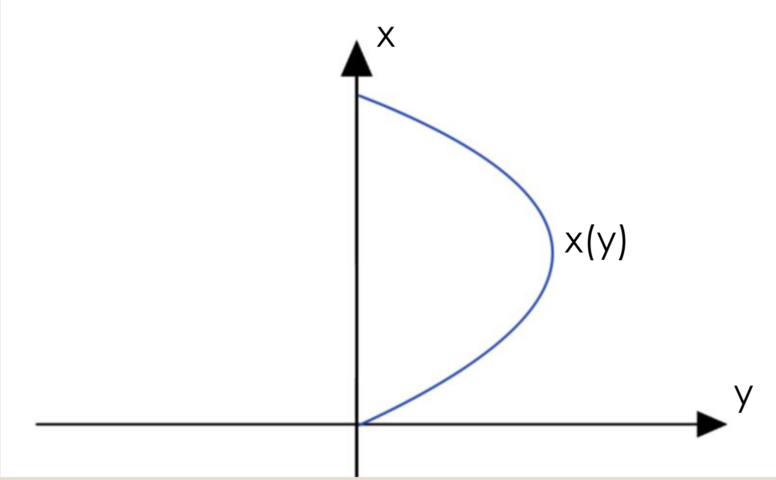
$$\Rightarrow \quad \int_{-1}^{0} \int_{-2\arcsin(y)}^{\pi} f(x, y) \cdot dx\, dy$$

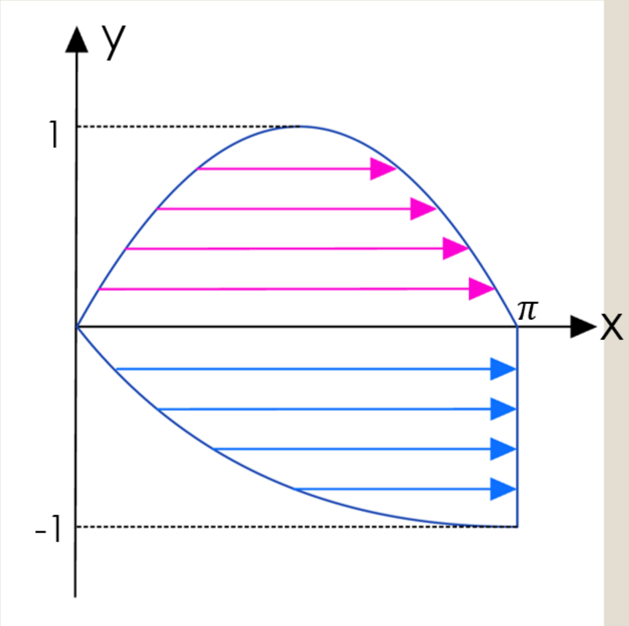


Dies ist auch eine Funktionsgraph
für eine Funktion x(y)

Obere Funktion

Die obere Grenze kann nicht als eine Funktion x(y) geschrieben werden



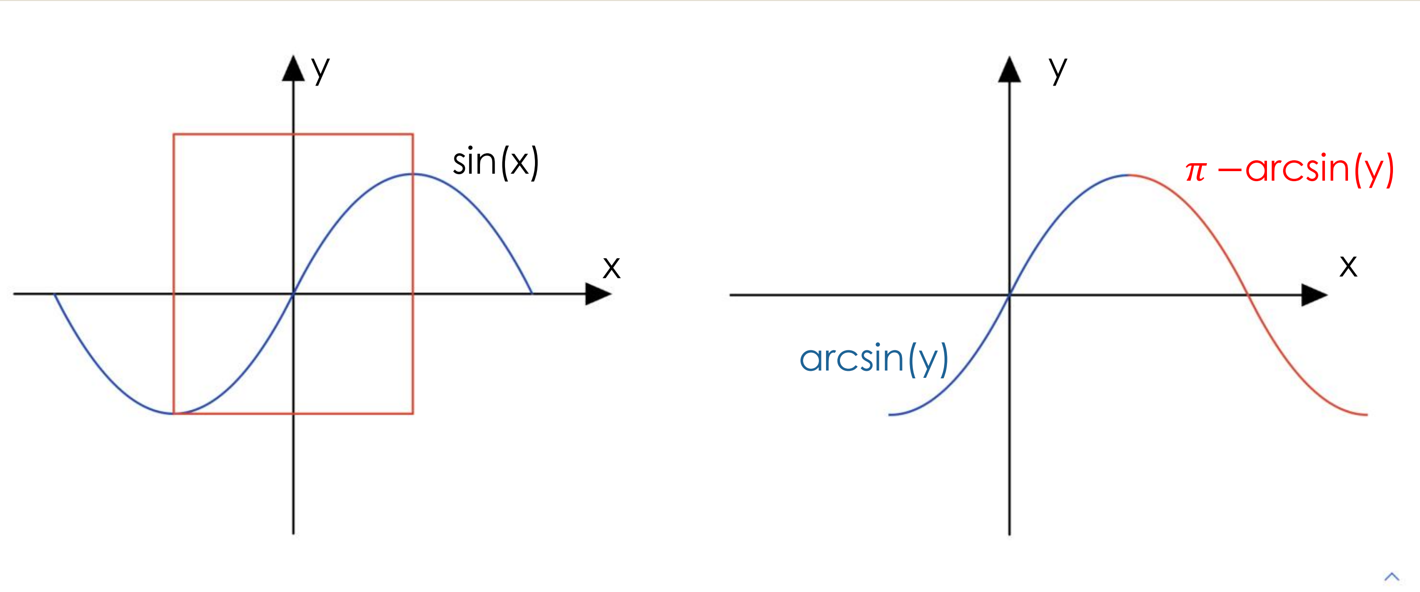


Die Funktion muss stückchenweise zusammengesetzt werden. Man trennt die Funktion bei $x = \frac{\pi}{2}$

Obere Funktion

Formt man die Funktion $y = \sin(x)$ nach x um, erhält man $x = \arcsin(y)$

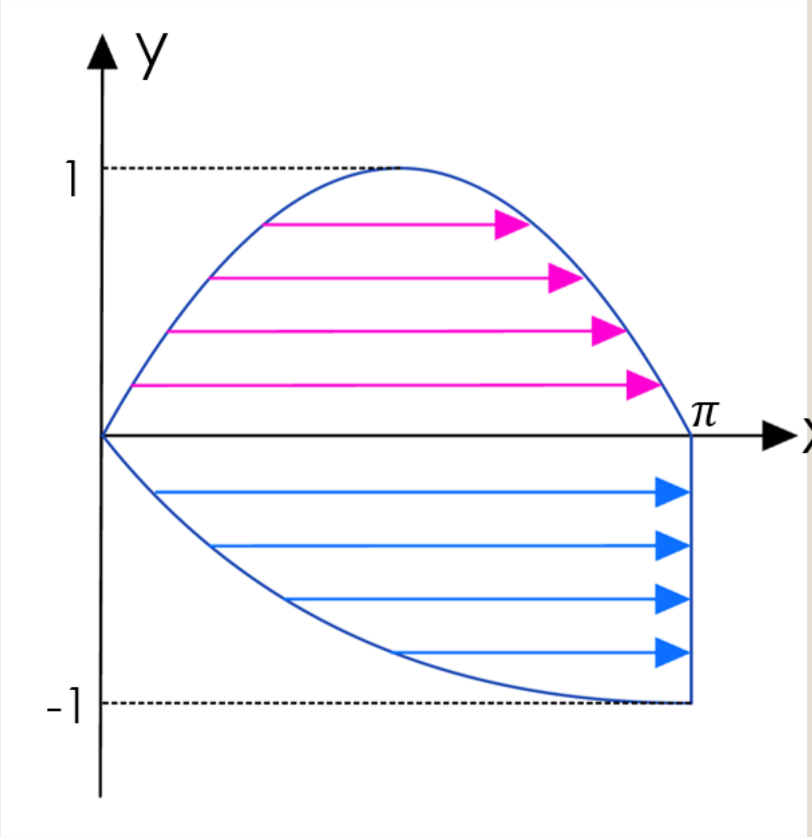
Diese Funktion ist zudem auf dem Intervall [0, π] nicht überall definiert.



$$\int_0^1 \int_{\arcsin(y)}^{\pi-\arcsin(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

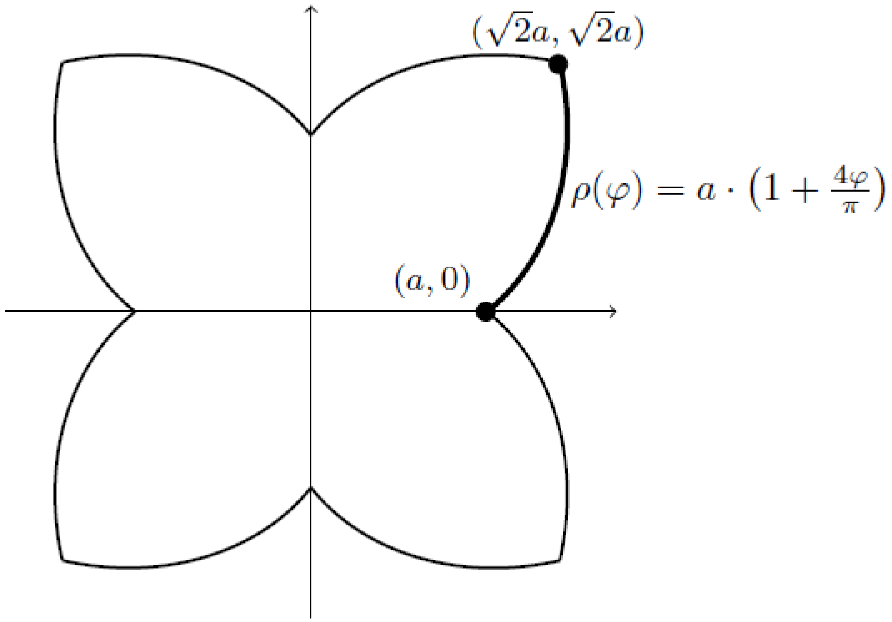
Endresultat

$$\int_{-1}^{0}\int_{-2\cdot\arcsin(y)}^{\pi} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{0}^{1}\int_{\arcsin(y)}^{\pi-\arcsin(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$



Basisprüfung Sommer 2022 (Offene Aufgabe)

Frage 23 Für $a > 0$ sei die folgende rotations- und spiegelsymmetrische Figur gegeben: Im ersten Quadranten sind die Punkte $(a, 0)$ und $(\sqrt{2}a, \sqrt{2}a)$ über eine Kurve mit Polarkoordinaten $\rho(\varphi) = a \cdot \left(1 + \frac{4\varphi}{\pi}\right)$ verbunden. Bestimmen Sie das polare Flächenträgheitsmoment der Figur bezüglich der Achse durch den Koordinatenursprung.



Lösung BP Sommer 2022

Durch die Symmetrie der Figur kann das Flächenträgheitsmoment für das von der Kurve $\rho(\varphi)$ und der Geraden $x = y$ berandete Flächenstück berechnet werden. Für das gesamte Flächenträgheitsmoment muss das Resultat mit 8 multipliziert werden.

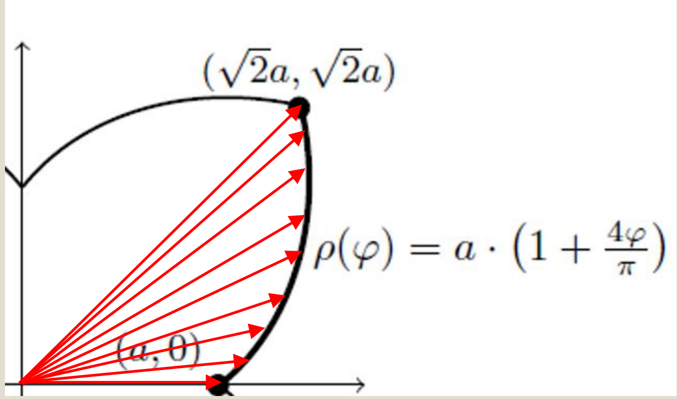
Dieser Achtel der Fläche lässt sich gut in Polarkoordinaten berechnen.

Es gilt $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Der Radius sollte vom Ursprung bis zum Rand der Fläche zeigen.

Da der Rand durch die Funktion $\rho(\varphi)$ gegeben ist, wählen wir $\rho(\varphi)$

Als obere Grenze für den Radius.



$$\Theta = 8 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\left(1+\frac{4\varphi}{\pi}\right)} r^3 \cdot dr \cdot d\varphi = 2\mathrm{a}^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{4\varphi}{\pi}\right)^4 d\varphi = \frac{a\pi^4}{10} \cdot (1 + 4\varphi)^5 \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{31}{10} \pi a^4$$

Integrale mit Parameter

(ZF S.3)

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,dt = f\big(x, v(x)\big)\cdot v'(x) - f\big(x, u(x)\big)\cdot u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(x,t)dt$$

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f\big(v(x)\big)\cdot v'(x) - f\big(u(x)\big)\cdot u'(x)$$

Speziallfall: $\frac{d}{dx}\int_{a}^{v(x)} f(t)\,dt = f\big(v(x)\big)\cdot v'(x)$

Basisprüfung Sommer 2022 (SC)

Frage 12 (V) Sei $f(x) = \int_e^{e^x} \ln(x \ln t)\, dt$. Wie lautet die (nicht vereinfachte) Ableitung $f'(x)$?

A $f'(x) = e^x \cdot \ln(x^2) + \int_e^{e^x} \frac{x}{t} \cdot \frac{1}{x \ln t}\, dt$

C $f'(x) = e^x \cdot \ln(x^2) + \int_e^{e^x} \ln t \cdot \frac{1}{x \ln t}\, dt$

B $f'(x) = \ln(x) + \int_e^{e^x} \ln t \cdot \frac{1}{x \ln t}\, dt$

D $f'(x) = \ln(x) + \int_e^{e^x} \frac{x}{t} \cdot \frac{1}{x \ln t}\, dt$

Lösung: Wir benutzen die erste Formel der vorherigen Seite. Einsetzen ergibt:

$$f'(x) = \ln(x \cdot \ln(e^x)) \cdot e^x - \ln(\mathrm{x} \cdot \ln(e)) \cdot 0 + \int_e^{e^x} \frac{1}{\mathrm{x} * \ln(t)} * \ln(t)\, dt \quad = \ln(x^2) \cdot e^x + \int_e^{e^x} \frac{1}{\mathrm{x} * \ln(t)} * \ln(t)\, dt$$

Damit stimmt die Antwort C.

VEKTORANALYSIS

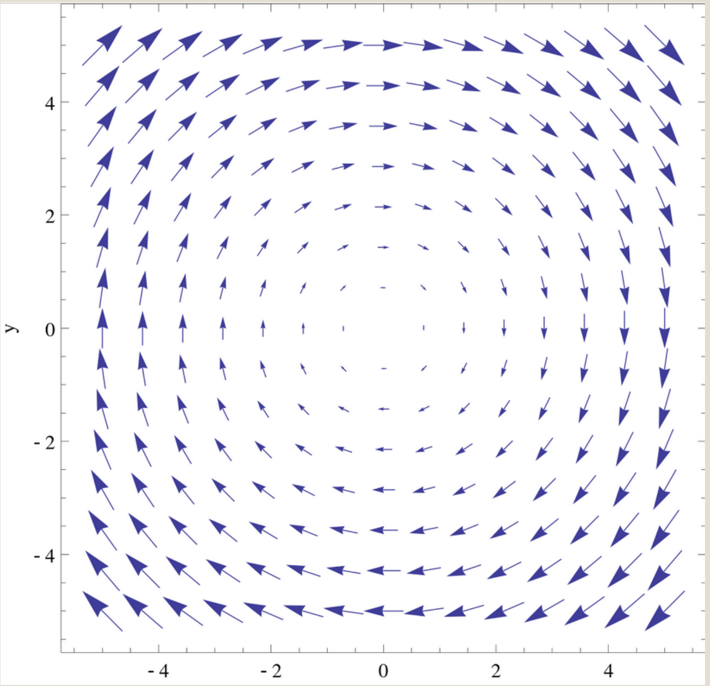
Vektor- & Skalarfelder

- **Skalarfeld:** Weist jedem Punkt (x,y,z) einen skalaren Funktionswert f(x,y,z) ∈ ℝ zu.

- **Vektorfeld:** Weist jedem Punkt (x,y,z) einen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ zu.

- Beispiel: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \cdot z \\ z \\ y \end{pmatrix}$

Konstantes Vektorfeld: $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, a, b, c ∈ ℝ



https://de.wikipedia.org/wiki/Rotation_eines_Vektorfeldes#/media/Datei:Uniform_curl.svg

Stationäre und Instationäre Felder

- Instationär: Das Vektorfeld verändert sich mit der Zeit $\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{v}(x,y,z,t)$
- Stationär: Das Vektorfeld ist zeitlich konstant

Feldlinien:

Eine Kurve, die tangential zu den Feldvektoren verläuft.

Bsp: $grad\ f(\vec{r})$ Ist das Gradientenfeld. Da der Gradient senkrecht auf der Niveaufläche steht, stehen auch die Feldlinien senkrecht auf der Niveaufläche