



ANALYSIS II

Übungsstunde VIII

- Intuationsübung
- Nachbesprechung Serie 7
- Arbeitsrechnungen
- Satz von Stokes
- Potentialfelder

Ablauf

Intutionsübung

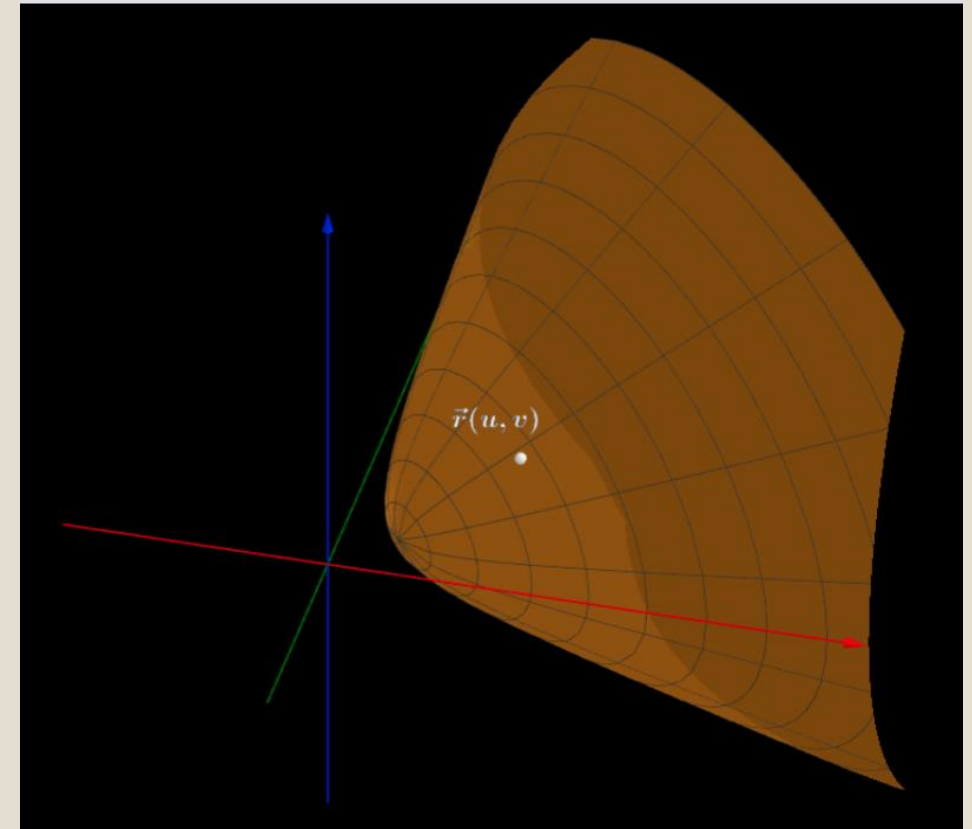
Bei der Flussrechnung durch eine parametrisierte Fläche muss man jeweils entscheiden, ob der Normalenvektor der Parametrisierung bereits der Flussrichtung entspricht oder ob noch ein (negatives) Vorzeichen eingefügt werden muss. Wir wollen dies hier anhand eines Beispiels üben.

Gegeben sei die Fläche $S : xy = z^2 + 1$ mit Parametrisierung

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{u^2 + 1} - u \cos(v) \\ \sqrt{u^2 + 1} + u \cos(v) \\ u \sin(v) \end{pmatrix}, \quad u > 0, \quad v \in [0, 2\pi].$$

Die Parametrisierung erfüllt

$$\vec{r}_u = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} - \cos v \\ \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} + \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_v = \begin{pmatrix} u \sin v \\ -u \cos v \\ u \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{pmatrix} u + \frac{u^2 \cos v}{\sqrt{u^2+1}} \\ u - \frac{u^2 \cos v}{\sqrt{u^2+1}} \\ \frac{-2u^2 \sin v}{\sqrt{u^2+1}} \end{pmatrix}.$$



Nun zu den Aufgaben **für die folgenden 4 Minuten:**

- Der Fluss soll von der z -Achse weg erfolgen. Entscheiden Sie, ob $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ dieser Richtung entspricht oder ob ein Vorzeichenwechsel nötig ist!
- Für den Rest der Zeit: Wie haben Sie Ihre Entscheidung getroffen? Beschreiben Sie Ihr Vorgehen und notieren Sie sich weitere Möglichkeiten/Strategien, wie man diese Frage in passenden, anderen Beispielen finden könnte.

Intutionsübung

Nehmen Sie sich **3 Minuten Zeit** für folgende Aufgabe:

- Vergleichen Sie Ihr Resultat sowie Ihre Entscheidungsmöglichkeiten/Strategien mit einer Person neben Ihnen und ergänzen Sie sie gegenseitig, wo es sinnvoll ist.
- Wählen Sie gemeinsam einen Eintrag und beschreiben Sie genauer, wie man damit das Vorzeichen bestimmt und worauf man dabei achten kann.
- Bereiten Sie sich gemeinsam darauf vor, dies kurz der Gruppe zu erklären.

Arbeit entlang eines parametrisierten Wegs

Satz. Die **Arbeit** A eines Vektorfelds $\vec{v}$ entlang eines Wegs W von P nach Q mit Parametrisierung $\vec{r}(t)$, $t \in [t_P, t_Q]$, beträgt

$$A = \int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{t_P}^{t_Q} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \, dt = \int_{t_P}^{t_Q} \begin{pmatrix} v_1(x(t), y(t), z(t)) \\ v_2(x(t), y(t), z(t)) \\ v_3(x(t), y(t), z(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \, dt.$$

Bemerkungen:

- Der Weg ist eine Kurve im Raum und wird daher nur von einem Parameter beschrieben.
- Nur der Anteil des Vektorfelds, der kollinear zur Richtung des Weg ist, zählt für die Arbeit.
- Vertauscht man die Durchlaufsrichtung, ändert sich das Vorzeichen der Arbeit.
- Ist der Wert der Arbeit positiv, so wird das Teilchen vom Vektorfeld geschoben
- Wege können beliebig aneinander gereiht werden, solange die Start- und Endpunkte übereinstimmen

Beispielaufgabe

Welche Arbeit muss man im Vektorfeld $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{3x^2}{y} \\ -\frac{16}{27} \cdot \frac{y^2}{x} \\ z^2 \end{pmatrix}$ aufwenden, wenn man sich im Uhrzeigersinn entlang der Ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ in der xy-Ebene bewegt?

Satz von Stokes

Satz (Satz von Stokes). Seien $\vec{v}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $S \subset D(\vec{v}) \subset \mathbb{R}^3$ eine beschränkte Fläche. Sei der Weg ∂S der **Rand von S** . Dann ist die Arbeit A von $\vec{v}$ entlang ∂S gegeben durch

$$A = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO.$$

Dabei ist $\vec{n}$ so orientiert, dass ∂S bezüglich $\vec{n}$ im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird.

Analog zum Fluss $\rightarrow$ Statt über die Oberfläche integriert man über das Volumen

Hier: Statt über die Kurve integriert man über die Fläche, welche von der Kurve eingeschlossen wird

Funktioniert nur, wenn es sich um einen geschlossenen Weg handelt

Schliessen eines Wegs

Genauso, wie man bei der Flussrechnung ein Oberfläche mit einer zusätzlichen Fläche schliessen kann, ist es möglich einen Weg mit einer zusätzlichen Kurve zu schliessen.

Das Arbeitsintegral entlang dieses Wegs muss am Schluss von dem Resultat aus dem Satz von Stokes abgezogen werden.

Basisprüfung Winter 2021 (Satz von Stokes)

4. Der Weg γ auf der im Koordinatenursprung zentrierten Einheitskugel führe entlang des Meridians (Halbkreises) mit Längengrad $\varphi = \pi/6$ vom Nord- zum Südpol. Bestimmen Sie die Arbeit des Vektorfelds $\vec{v} = (x^2y, y^2z, z^2x)$ entlang γ .

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Mit welcher Kurve schliessen wir den Weg am besten?

Welche Arbeit ergibt sich aus diesem zusätzlichen Weg?

Wie Parametrisieren wir die Fläche?

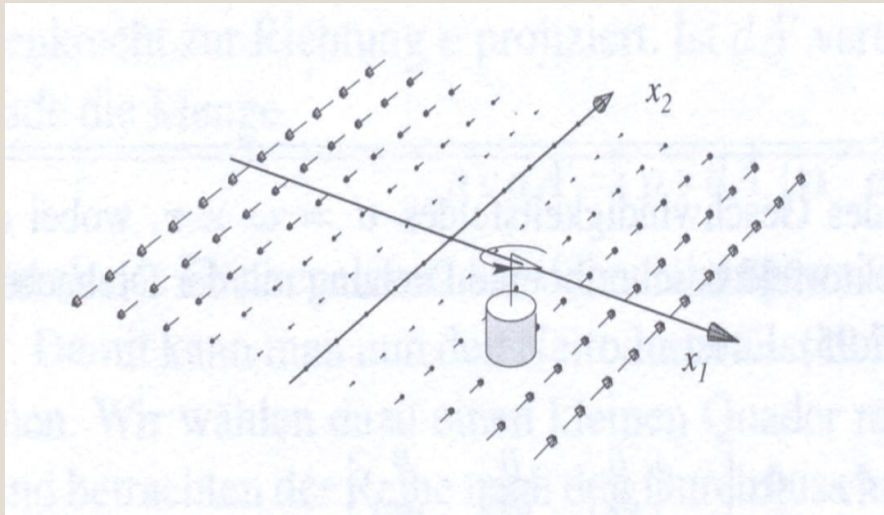
Wie sieht das Integral für den Satz von Stokes aus?

Wirbelfreie Vektorfelder

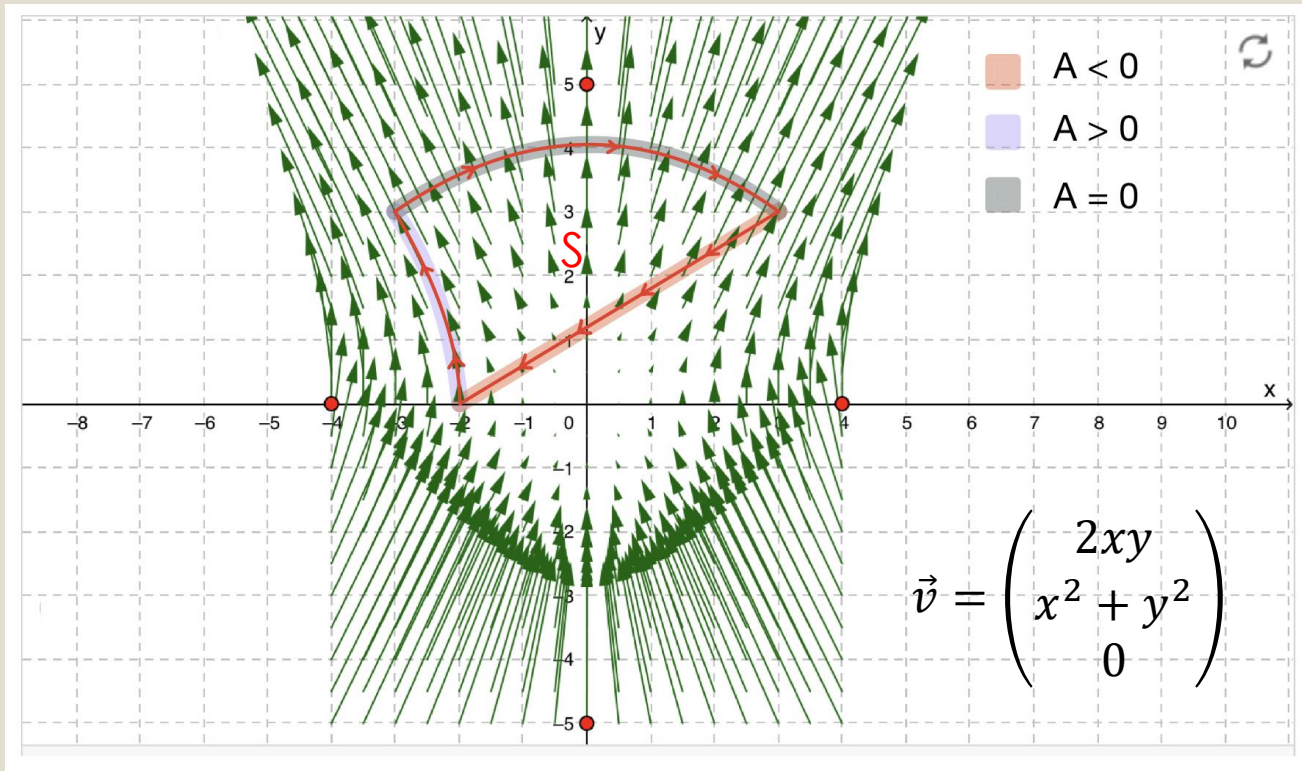
Satz. Wenn $\vec{v}$ wirbelfrei ist (d.h. $\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{0}$) und W der Rand einer Fläche S mit $S \subset D(\vec{v})$ ist, dann erfüllt die Arbeit A von $\vec{v}$ entlang W

$$A = 0.$$

Analog zum Fluss: Gilt $\text{div}(\vec{v}) = 0$ gilt, so ist der Fluss durch jede geschlossene Oberfläche gleich Null

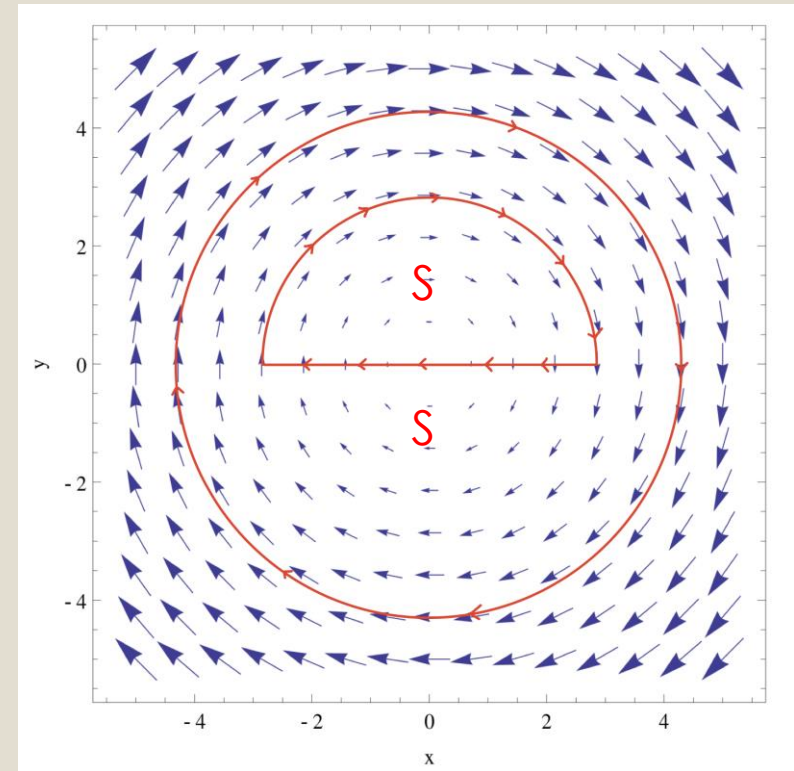


Wenn man einen Korken in ein Vektorfeld setzt, welches nicht wirbelfrei ist, so « schwimmt » der Korken nicht nur mit dem Vektorfeld, sondern dreht sich auch noch um die eigene Achse.



$$\text{rot } \vec{v} = 0$$

$$\sum_{\partial S} A = 0$$



$$\text{rot } \vec{v} \neq 0$$

$$\sum_{\partial S} A \neq 0$$

Im Falle von wirbelfreien Feldern bewegt man sich bei einem geschlossenen Weg immer zu gleichen Anteilen parallel und antiparallel zu den Feldvektoren (Dabei kommt es nicht nur auf die Länge der Strecke an sondern auch auf kollinearen Anteil des Wegs und der Feldvektoren)

Potentialfelder

- Ein Vektorfeld dessen Komponenten v_1 & v_2 & v_3 die partiellen Ableitungen einer Funktion sind, nennt man **Potentialfeld** und die dazugehörige Funktion ist ein **Potential**.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

Ein Potentialfeld wird auch **Gradientenfeld** genannt.

Das dazugehörige Potential kann über eine Integration der einzelnen Komponenten und einen anschliessenden Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

Integrabilitätsbedingungen gelten auch hier!

Konservative Vektorfelder

Satz. *Ein Vektorfeld $\vec{v}$ ist genau dann konservativ, wenn es ein Potentialfeld ist.*

- Ein Vektorfeld ist konservativ, wenn die Arbeit nur vom Start- & Endpunkt abhängt, aber nicht von dem Weg der die beiden Punkte verbindet.
- Im Speziellen gilt, dass die Arbeit entlang von allen geschlossenen Wegen verschwindet, da der Startpunkt gleichzeitig auch der Endpunkt ist.

Basisprüfung Sommer 2022

Frage 18 (VI) Für welchen Wert von $a \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $\vec{v}(x, y) = (ax \sin y, (y + x^2 + a^2) \cos y)$ konservativ?

☐ A $a = 1$

☐ B $a = -2$

☐ C $a = 2$

☐ D $a = 0$

Arbeitsberechnungen in einem Potentialfeld

Die Arbeit in einem Potentialfeld entlang einem Weg vom Startpunkt S zum Endpunkt E ist durch die Formel:

$$A = f(E) - f(S)$$

Wobei f das Potential (die Funktion) des Potentialfelds ist.

Basisprüfung Winter 2018

7. **Single Choice.** Es sei γ ein geschlossener Weg in der Ebene und $\vec{v}$ ein Vektorfeld. Die Arbeit von $\vec{v}$ entlang γ sei 2. Welche Eigenschaft kann $\vec{v}$ besitzen?

- (a) $\vec{v}$ ist quellenfrei.
- (b) $\vec{v}$ ist wirbelfrei.
- (c) $\vec{v}$ ist ein Potentialfeld.

Einfach zusammenhängende Räume

Sind Wirbelfreie Vektorfelder auch Potentialfelder, da die Arbeit entlang geschlossene Wege verschwindet?

→ Nur wenn der Definitionsbereich des Vektorfelds einfach zusammenhängend ist.

Einfach zusammenhängend:

Jeder geschlossene Weg muss innerhalb von $D(\vec{v})$ zu einem Punkt zusammengezogen werden können.

Einfach zusammenhängende Räume

Merkhilfe:

« In einem einfach zusammenhängenden Raum möchte man sein Velo nicht abschliessen (da das Veloschloss immer abgestreift werden kann) »

Beispiel einfach zusammenhängende Räume:

- $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Kugel(-oberfläche)}\}$

(ein geschlossener Weg innerhalb und ausserhalb der Kugeloberfläche kann auf einen Punkt zusammengezogen werden)

Beispiel **nicht** einfach zusammenhängende Räume:

- $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Torus}\}$
- $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Gerade}\}$

Basisprüfung Sommer 2020 (MC)

9. (VI) Sei $\vec{v}$ ein wirbelfreies Vektorfeld mit $D(\vec{v}) = \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie, welche der folgenden Aussagen *sicher wahr* sind.
- (a) Es existiert ein Potential $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \text{grad} f$.
 - (b) $\text{grad} \text{div} \vec{v} \equiv 0$.
 - (c) Die Arbeit entlang eines Weges $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ hängt nur vom Start- und Endpunkt ab, nicht aber vom Weg selbst.
 - (d) Der Fluss $\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO$ aus einer geschlossenen Oberfläche S hinaus ist immer 0.

Basisprüfung Winter 2021

7. (VI) Sei $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ein Potentialfeld mit Potential f . Welche Aussagen sind richtig?

(a) $\frac{\partial}{\partial y}v_1 = \frac{\partial}{\partial x}v_2, \frac{\partial}{\partial x}v_3 = \frac{\partial}{\partial z}v_1, \frac{\partial}{\partial y}v_3 = \frac{\partial}{\partial z}v_2.$

(b) Der Definitionsbereich von $\vec{v}$ ist einfach zusammenhängend.

(c) $\operatorname{div} \vec{v} = 0.$

(d) $\operatorname{rot} \vec{v}$ ist ein Potentialfeld.

Basisprüfung Winter 2019 (MC)

8. (Vektorfelder MC) Gegeben sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ definiert auf $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Für welche der folgenden Bedingungen ist $\vec{v}$ konservativ? Kreuzen Sie “Wahr” an, wenn aus der Bedingung folgt, dass $\vec{v}$ konservativ ist, und “Falsch”, wenn dies nicht immer gilt.
- (a) Für alle geschlossenen Wege W in U verschwindet die Arbeit von $\vec{v}$ entlang W .
 - (b) Es gilt $\vec{v} = \text{grad } f$ für eine Skalarfunktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.
 - (c) Es gilt $\text{rot } \vec{v} = (0, 0, 0)$.
 - (d) Es gilt $\text{div } \vec{v} = 0$.