ANALYSIS II

Übungsstunde XIII

Ablauf

- Taylor- & Potenzreihenansätze
- Autonome lineare DGL Systeme mit konst. Koeffizienten
- Phasenporträt
- Stabilitätsverhalten
- Basisprüfung

Basisprüfung Winter 2021 (SC)

21. (VII) Die Lösungskurve einer gewöhnlichen Differentialgleichung hänge eindeutig vom Wert $y(x_0) = y_0$ sowie der Steigung $y'(x_0)$ in diesem Punkt ab. Um welchen Typ von Differentialgleichung könnte es sich handeln?

    (a) Differentialgleichung mit singulärer Lösung

    (b) Exakte Differentialgleichung

    (c) Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

    (d) Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

Tipp: Überlegt euch wie viele/ welche AWP's man für welche DGL braucht um eine Lösung eindeutig zu bestimmen.

Lösung: Nur die Lineare DGL 2. Ordnung besitzt zwei Scharparameter und benötigt daher zwei AWP's. Dabei bezieht sich immer eines auf die Ableitung y' und eines auf die Funktion y selbst

Taylor- & Potenzreihenansätze

Satz. *Sei*

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = q(x)$$

eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wenn p_1 und p_0 eine konvergierende Potenzreihenentwicklung um ein x_0 besitzen, dann hat auch $y(x)$ eine konvergierende Potenzreihenentwicklung um x_0.

Ansatz:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ \ldots$$

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ \ldots$$

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k \cdot x^{k-2} = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \ \ldots$$

Basisprüfung Sommer 2018

21. (Taylorreihe für DGL SC) Es sei $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x) = 0.$$

Welche der folgenden Aussagen über die Koeffizienten a_n ist korrekt?

(a) Es gilt $(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_{n-2} = 0$ für $n \geq 2$.

(b) Es gilt $n(n-1)a_{n+2} + na_n + a_{n-2} = 0$ für $n \geq 2$.

(c) Es gilt $(n+2)a_{n+1} + na_n + a_{n-1} = 0$ für $n \geq 2$.

(d) Es gilt $na_{n+1} + na_n + a_{n-1} = 0$ für $n \geq 2$.

Lösung

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k \cdot x^{k-2} = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 \ldots$$

$$xy' = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k x^k = a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + 4a_4x^4 + 5a_5x^5 + 6a_6x^6 \ldots$$

$$x^2y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^{k+2} = a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + a_3x^5 + a_4x^6 + a_5x^7 + a_6x^8 \ldots$$

$\boldsymbol{x^0}$: $2a_2 = 0$

$\boldsymbol{x^1}$: $a_1 + 6a_3 = 0$

$\boldsymbol{x^2}$: $a_0 + 12a_4\ (+2a_2) = 0 \Leftrightarrow 12a_4 = -a_0$

$\boldsymbol{x^3}$: $20a_5 + 3a_3 + a_1 = 0$

$\boldsymbol{x^4}$: $30a_6 + 4a_4\ (+a_2) = 0$

$\underline{n = 2:}$

$a)\ 12a_4 + 2a_2 + a_0 = 0 \Leftrightarrow -a_0 + a_0 + 0 = 0$

$\Longrightarrow$ Lösung a)

Basisprüfung Winter 2020

7. Seien $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ gegeben. Weiter sei $y(x)$ eine Funktion, welche das folgende Anfangswertproblem löst:

$$y'' + x^2 y' + x^3 y = 0, \qquad y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_2, \ldots, a_5$ der Potenzreihe $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in Abhängigkeit von a_0 und a_1.

Lösung

$$x^3 y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, x^{k+3} = a_0 x^3 + a_1 x^4 + a_2 x^5 + a_3 x^6 + a_4 x^7 + a_5 x^8 + \ \ldots$$

$$x^2 y' = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k x^{k+1} = a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + 3a_3 x^4 + 4a_4 x^5 + 5a_5 x^6 + \ \ldots$$

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k \cdot x^{k-2} = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \ \ldots$$

$$x^0\colon \ 2a_2 = 0 \ \rightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

$$x^1\colon \ 6a_3 = 0 \ \rightarrow \boxed{a_3 = 0}$$

$$x^2\colon \ a_1 + 12a_4 = 0 \ \rightarrow \boxed{a_4 = -\frac{1}{12} a_1}$$

$$x^3\colon a_0 + 2a_2 + 20a_5 = 0 \ \rightarrow \boxed{a_5 = -\frac{1}{20} a_0}$$

Autonome DGL-Systeme mit konst. Koeffizienten

DGL-System mit zwei DGL's der Form

$$\left|\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1\\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2\end{aligned}\right|$$

Autonom: kein t kommt vor

Inhomogener Teil

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x} + \vec{b}$$

LinAlg Methode (Homogenes System mit 2 DGL's)

Solltet ihr bereits aus LinAlg kennen: (alg. VF = geom. VF muss für die EW gelten)

1. Eigenwerte λ_1 & λ_2 von A berechnen
2. Eigenvektoren $\vec{E}_1$ & $\vec{E}_2$ zu den Eigenwerte bestimmen
3. Lösung ist gegeben durch:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \vec{E}_1 + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \vec{E}_2$$

Achtung: Bei Doppelten Nullstellen wird nicht mit t multipliziert! (siehe z. B. LinAlg BP W20 Aufg. 22)

Analysis Methode (Geht immer)

Vorgehen:

1. (I) nach y oder x umformen und ableiten → $\dot{x}(t)$ / $\dot{y}(t)$
2. In (II) einsetzen → DGL höherer Ordnung
3. DGL lösen (AWP einsetzen)
4. y(t) mit Hilfe von x(t) & $\dot{x}(t)$ bestimmen

$$(I)\ \left|\dot{x}(t) = x + 3y\right|$$
$$(II)\ \left|\dot{y}(t) = 3x + y\right|$$

1. $y = \frac{1}{3}(\dot{x} - x) \rightarrow \dot{y} = \frac{1}{3}(\ddot{x} - \dot{x})$

2. $\frac{1}{3}(\ddot{x} - \dot{x}) = 3x + \frac{1}{3}(\dot{x} - x) \rightarrow 8x + 2\dot{x} - \ddot{x} = 0$

3. $8 + 2\lambda - \lambda^2 = 0 \rightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 4) = 0 \rightarrow \boxed{x(t) = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{4t}}$

4. $\boxed{y(t)} = \frac{1}{3}(-2C_1e^{-2t} + 4C_2e^{4t} - C_1 \cdot e^{-2t} - C_2e^{4t}) = \boxed{-C_1e^{-2t} + C_2 \cdot e^{4t}}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \cdot e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Beispielaufgabe

Wie lautet die Lösung des DGL Systems

$$\left| \begin{array}{c} \dot{x}(t) = x - 2y \\ \dot{y}(t) = -2x + y \end{array} \right|$$

(Beide Methoden funktionieren)

Lösung – LinAlg

$$\left|\begin{matrix}\dot{x}(t) = x - 2y \\ \dot{y}(t) = -2x + y\end{matrix}\right|$$

Die zugehörige Matrix lautet $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ A ist symmetrisch $\rightarrow$ diagonalisierbar

Gleichung für die Eigenwerte: $(1-\lambda)^2 - 4 = 0 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \rightarrow \lambda_1 = -1\,,\ \lambda_2 = 3$

Die Eigenvektoren ergeben sich aus der Gleichung $\left(\mathrm{A} - I \cdot \lambda_{1/2}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

λ_1: $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

λ_2: $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung – Analysis

$$\left|\begin{matrix}\dot{x}(t) = x - 2y \\ \dot{y}(t) = -2x + y\end{matrix}\right|$$

Auflösen der ersten Gleichung nach y ergibt: $y = \frac{1}{2}(x - \dot{x})$

Ableiten nach t: $\dot{y} = \frac{1}{2}(\dot{x} - \ddot{x})$

Einsetzen in die zweite Gleichung: $\frac{1}{2}(\dot{x} - \ddot{x}) = -2x + \frac{1}{2}(x - \dot{x}) \rightarrow 3x + 2\dot{x} - \ddot{x} = 0$

Lösung für $x(t)$: $3 + 2\lambda - \lambda^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3 \rightarrow x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$

$$y(t) = \frac{1}{2}(x - \dot{x}) = \frac{1}{2}C_1 e^{-t} + \frac{1}{2}C_2 e^{3t} + \frac{1}{2}\mathrm{C_1 e^{-t}} - \frac{3}{2}\mathrm{C_2 e^{3t}} = \mathrm{C_1 e^{-t}} - \mathrm{C_2 e^{3t}}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Phasenporträt

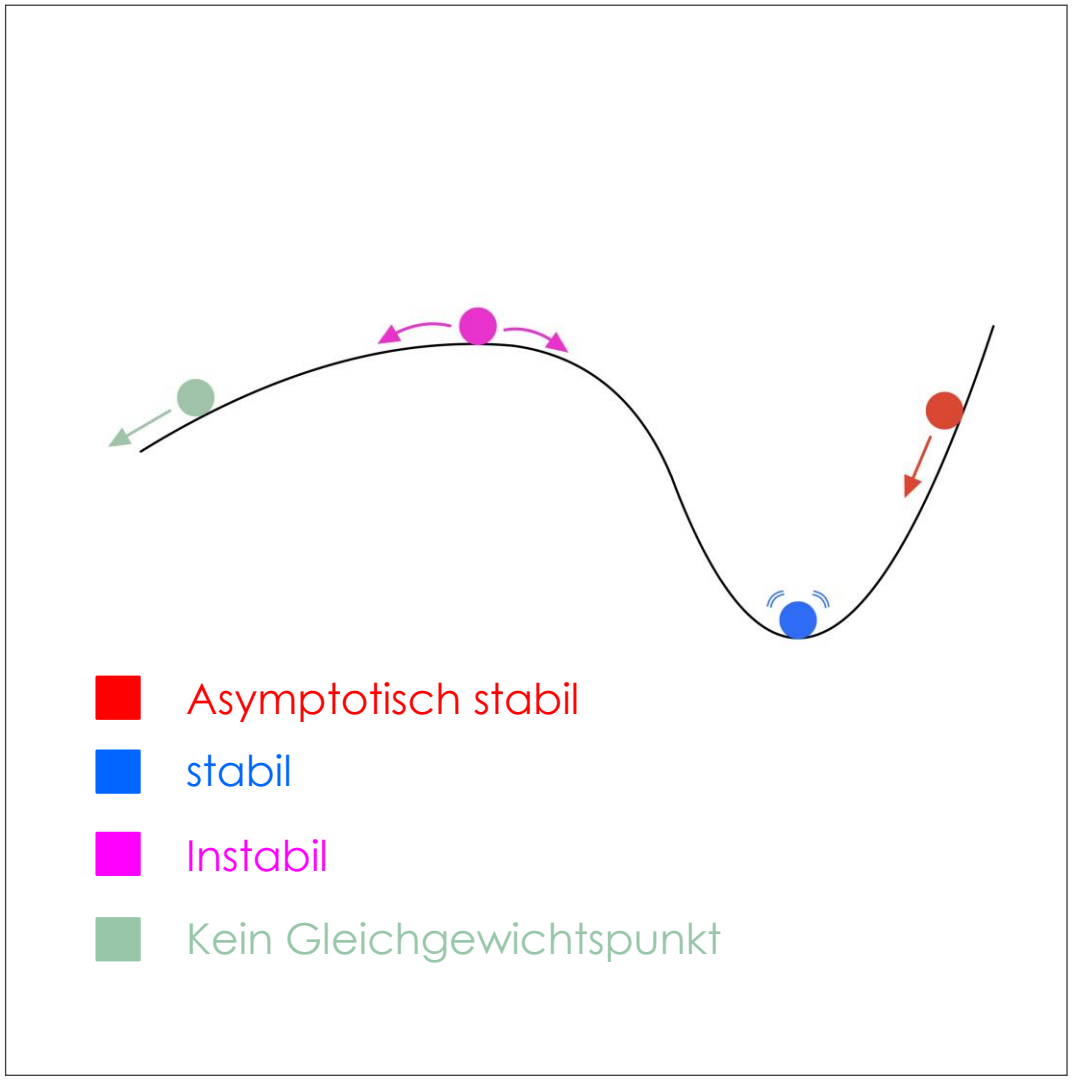
Allgemeine Darstellung eines autonomen DGL Systems: $\left|\begin{matrix}\dot{x} = f_1(x,y)\\ \dot{y} = f_2(x,y)\end{matrix}\right|$

Dazu kann man ein Vektorfeld definieren: $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$

Das Phasenporträt ist dann die Schar der Trajektorien (= Feldlinien) von $\vec{v}$

Man löst also die DGL: $y' = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}$

Diese Kurven besitzen denselben Durchlaufsinn wie die Richtung der Vektorpfeile



Gleichgewichtspunkte & Stabilitätsverhalten

Im Gleichgewicht gilt: $\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

→ Stationäre Lösung

Gleichgewichtspunkte & Stabilitätsverhalten

Man berechnet die Eigenwerte λ des DGL Systems und bestimmt das Stabilitätsverhalten folgendermassen:

$$Re(\lambda_i) \leq 0 \quad \forall \lambda_i \rightarrow asymptotisch\ stabil$$

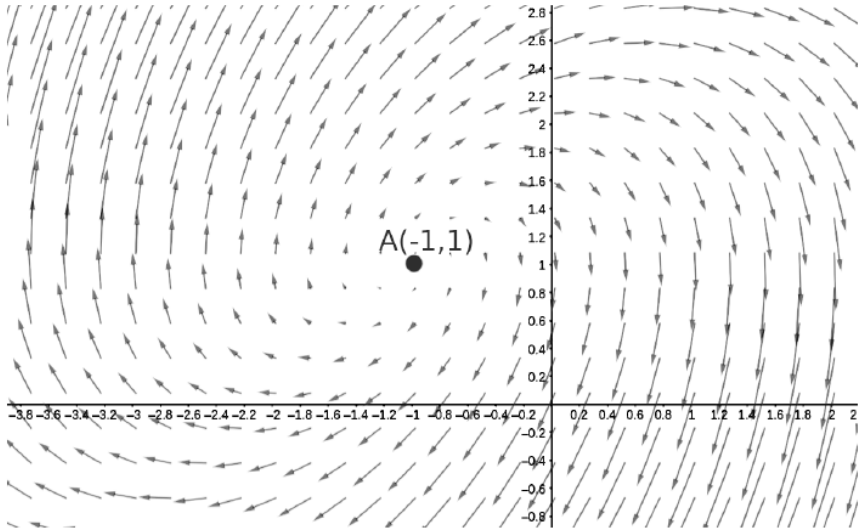
$$Re(\lambda_i) \leq 0,\ Im(\lambda_i) \neq 0 \rightarrow \forall \lambda_i \rightarrow (grenz)stabil$$

$$Re(\lambda_i) > 0 \quad mind.\, ein\ \lambda_i \rightarrow instabil$$

$$\lambda_i = 0 \quad mind.\ ein\ \lambda_i \rightarrow Ausgeartet$$

Basisprüfung Winter 2021

13. (VII) Der Punkt $A = (-1, 1)$ beschreibe eine stationäre Lösung eines autonomen Differentialgleichungssystems. Um welchen Typ von Gleichgewichtspunkt handelt es sich beim Punkt A?



(a) Stabil

(b) Asymptotisch stabil

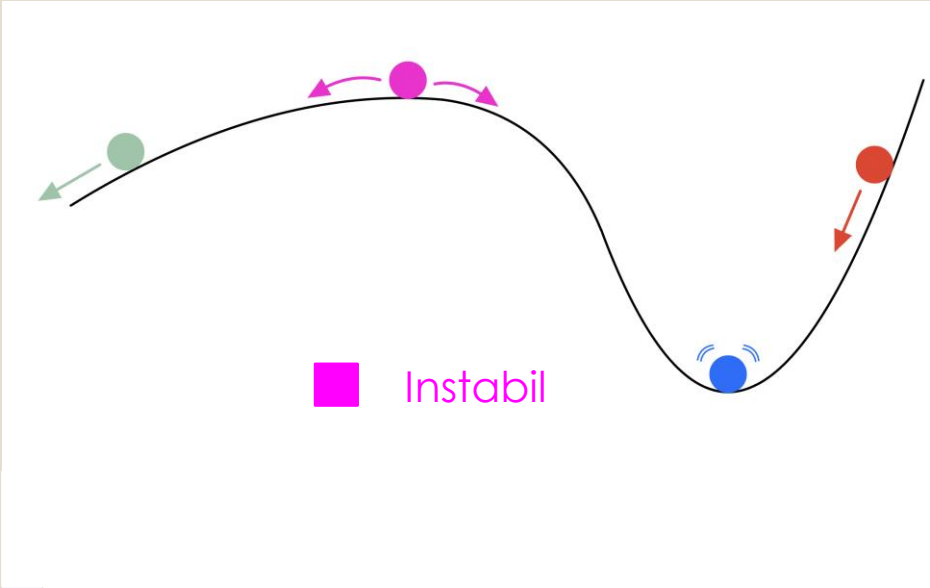
(c) Sattelpunkt

(d) Instabil

Lösung

Eine kleine Auslenkung führt nicht in den Stationären Punkt zurück

→ Instabiler Gleichgewichtspunkt

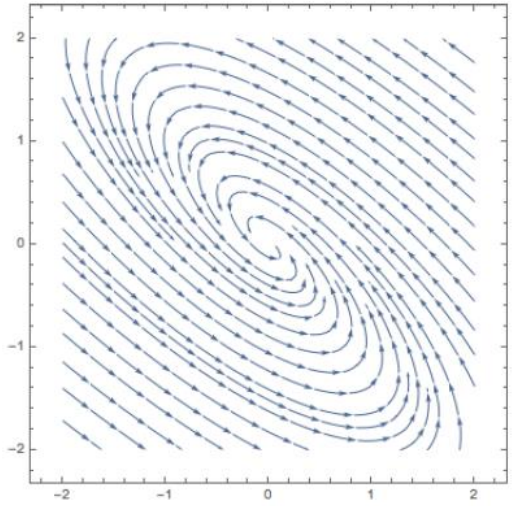


Basisprüfung Winter 2020 (SC)

26. (VII) Gegeben sei ein Parameter $a \in \mathbb{R}$. Das System von Differentialgleichungen

$$\dot{x} = 2ax - y$$
$$\dot{y} = x - ay,$$

hat $\lambda_{1,2} = \dfrac{a \pm \sqrt{9a^2 - 4}}{2}$ als Nullstellen des charakteristischen Polynoms (Sie müssen das nicht beweisen!) . Für welche Werte von a verhält sich das System wie das folgende Phasenporträt?



(a) $a \in (-\frac{2}{3}, 0)$.

(b) $a \in (0, \frac{2}{3})$.

(c) $a = -\frac{2}{3}$.

(d) $a \in (\frac{2}{3}, +\infty)$.

Lösung

Das Phasenporträt sieht nach einem asymptotisch stabilen System aus.

Daher muss gelten: $Re(\lambda_i) < 0$ $\rightarrow$ Das ist für $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ erfüllt

Winter 2018

3. **Single Choice.** Betrachten Sie ein lineares autonomes System von Differentialgleichungen der Form

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x},$$

wobei A eine reelle 2×2 Matrix ist. Angenommen, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind von der Form $a \pm ib$, wobei $a < 0$ ist. Welche der folgenden Antworten beschreibt das Stabilitätsverhalten des Gleichgewichtspunkts $\vec{0}$?

(a) Stabil.

(b) Instabil.

(c) Asymptotisch stabil.

Lösung

Betrachtet man die Bedingungen:

$$Re(\lambda_i) \leq 0 \quad \forall \lambda_i \rightarrow asymptotisch\ stabil$$

$$Re(\lambda_i) = 0,\ Im(\lambda_i) \neq 0 \rightarrow \forall \lambda_i \rightarrow stabil$$

$$Re(\lambda_i) > 0 \quad mind.ein\ \lambda_i \rightarrow instabil$$

$$\lambda_i = 0 \quad mind.\ ein\ \lambda_i \rightarrow Ausgeartet$$

Folgt, dass es sich um ein asymptotisch stabilen Gleichgewichtspunkt handelt.

BASISPRÜFUNG

Tipps & Dokumente

Formeln Tabellen Begriffe (Gelbes Buch)

Thema	**S.**	**Thema**	**S.**
Logarithmen Regeln	17	Integrationsregeln	71
Komplexe Zahlen	18-19	Spezielle Integrale	72-74
Polynome & Fundamentalsatz der Algebra	21	Schwerpunkt und Trägheitsmoment	76
Folgen, Reihen & Summen	38-40	Taylorreihen	77
Grenzwerte & Grenzwerte von Reihen	51-53	Differentialgleichungen	81-82
Graphentransformationen	55	Trigonometrische Identitäten	99
Diverse Funktionen	56-60	Drehmatrizen	112
Sätze über Grenzwerte & Stetigkeit	61	Koordinatentransformationen	113/114
Ableitungsregel / spezielle Ableitungen	63 / 65		
Fehlerrechnung	64		
Ebene Kurven	66-69		

Prüfungsübersicht (Offene Aufgaben)

	2022 S	2021 W	2020 S	2020 W	2019 S	2019 W	2018 S	2018 W	2017 S
Differentialgleichungen	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Fluss	x		x	x			x	x	x
Arbeit		x			x	x			
Krümmung / Evolute / Bogenlänge	x	x		x	x	x	x	x	x
Tangentialebene	x		x	x		x	x		x
Fehlerrechnung									x
(Mehrdimensionale) Integrale / Fläche	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Extremalwert Suche	x	x			x			x	
Integrabilitätsbedingung / Potential		x					x		

Gutes Übungsstunden Material

Dasselbe für LinAlg

https://n.ethz.ch/~bbenke

Thema heute

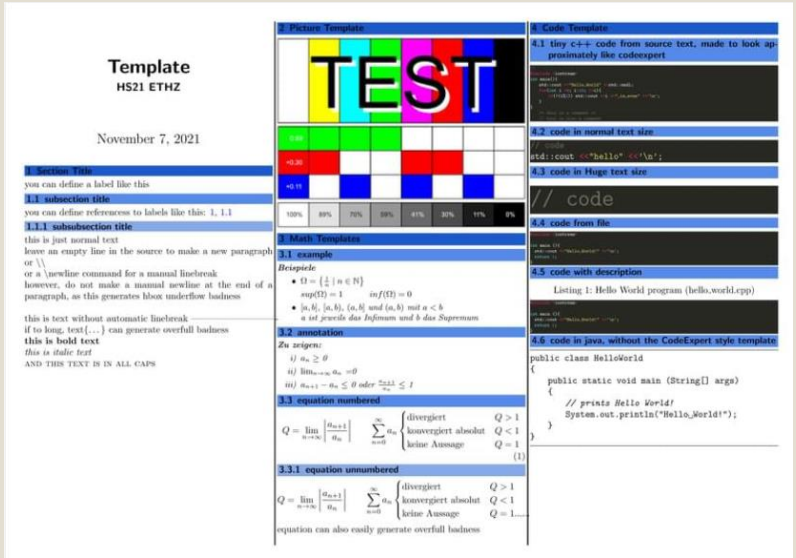
	W 22	S 22	W 21	S 21	W 20	S 20	W 19	S 19	W 18	S 18	W 17	S 17	W 16	S 16	W 15	S 15	W 14	S 14	W 13	S 13	W 12	S 12	S 11	Total
Differentialgleichungssysteme	●	-	-		●	●	-	●	●	●	●	●	●		●	●		●		●	●	●	●	16
Orthonormalisierungsverfahren		-	-		●		-			●	●	●	●	●	●	●		●	●	●	●	●	●	14
Eigenwerte/Eigenvektoren	●	-	-	●		●	-			●		●		●	●		●		●		●		●	11
Quadratische Formen		-	-	●	●		-		●		●				●	●	●	●	●			●		10
Unterraum/Basis	●	-	-	●	●	●	-				●			●		●	●					●		9
Kern/Bild		-	-				-	●	●	●			●	●				●		●	●			8
Darstellungsmatrix bestimmen	●	-	-	●			-										●		●	●		●		6
Lineare Abbildungen		-	-				-						●								●		●	3
Normen/Skalarprodukte		-	-			●	-	●																2
Regression		-	-				-							●										1
LR Zerlegung	●	-	-				-																	1

https://n.ethz.ch/~bbenke/files/pdf/linalg2_praesentation_10_lineare_diffgleichungssysteme_Frauenfelder_Benke.pdf

Zusammenfassung

Es sind Templates von AMIV für LaTeX Zusammenfassungen verfügbar:

https://www.overleaf.com/latex/templates/amiv-slash-ethz-summaries-template-landscape/trggddjtjhqr



Die blaue Zusammenfassung, die ich für die Übungsstunde benutzt habe wurde für das alte Reglement erstellt und erfüllt die neuen Anforderungen nicht mehr!

Lernplan

Die ETH veröffentlicht jedes Jahr eine Excel Mappe mit diversen Dokumenten zur Lernplanung.

https://ethz.ch/studierende/de/beratung/beratung-coaching/werkzeuge.html

Tipps

- Serien nur dann erneut lösen, wenn man merkt, dass man das Thema nicht verstanden hat
- Was an der Prüfung kommt, sieht man am besten in alten Prüfungen
  → Diese sollte man sorgfältig lösen (auch auf Zeit)
- Im Gelben Buch steht bereits vieles → spart Platz auf der Zusammenfassung
- Nicht übermässig viel Zeit in Analysis während der Lernphase investieren → Es gibt auch noch andere (schwere) Fächer
- Ab dem Anfang der Lernphase mit einer Zusammenfassung arbeiten und laufend korrigieren/ergänzen → Man sollte an der Prüfung nicht auf der ZF suchen müssen

Gerne könnt ihr mir auch noch in der Lernphase Fragen per Mail schreiben

Viel Erfolg an den Prüfungen ☺

LINALG

DGL Systeme

Aufgabentypen

22. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $y' = Ay$ wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) (**4 Punkte**) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ der Matrix A und die Eigenwerte von A.

(b) (**4 Punkte**) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.

(c) (**2 Punkte**) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y(0)$, für welche die zugehörige Lösung $y(t)$ gegen Null strebt für $t \to +\infty$.

Basisprüfung Winter 2020

System von n DGL's

→ Lösung sind n Gleichungen

22. Gegeben sei die Differentialgleichung 3. Ordnung

$$y'''(t) = 2y''(t) + y'(t) - 2y(t). \tag{1}$$

(a) (**2 Punkte**) Überführen Sie (1) durch Substitution in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung der Form $z' = Az$, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(b) (**3 Punkte**) Bestimmen Sie die Eigenwerte der in Teilaufgabe (a) gefundenen Matrix A. *Bemerkung*: Falls die Teilaufgabe (a) nicht gelöst wurde, können Sie mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

weiterrechnen.

(c) (**5 Punkte**) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1).

Basisprüfung Sommer 2020

DGL n-ter Ordnung

→ Lösung ist 1 Gleichung

Gleichung n-ter Ordnung

22. Gegeben sei die Differentialgleichung 3. Ordnung

$$y'''(t) = 2y''(t) + y'(t) - 2y(t). \tag{1}$$

(a) (**2 Punkte**) Überführen Sie (1) durch Substitution in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung der Form $z' = Az$, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(b) (**3 Punkte**) Bestimmen Sie die Eigenwerte der in Teilaufgabe (a) gefundenen Matrix A. *Bemerkung*: Falls die Teilaufgabe (a) nicht gelöst wurde, können Sie mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

weiterrechnen.

(c) (**5 Punkte**) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1).

Setze: $y(t) = y_0, \quad y'(t) = y_1, \quad y''(t) = y_2, \quad y'''(t) = 2y_2 + y_1 - 2y_0$

Wir nehmen nur die Ableitungen → $\begin{vmatrix} y'(t) = y_1 \\ y''(t) = y_2 \\ y'''(t) = -2y_0 + y_1 + 2y_2 \end{vmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Gleichung n-ter Ordnung

Man berechnet die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1 = 2 & E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = -1 & E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 = 1 & E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{t}}$$

Basisprüfung Sommer 2017

23. [**10 Punkte**] Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(t) = -8y(t) + 4y'(t). \qquad (*)$$

a) [**2 Punkte**] Verwandeln Sie $(*)$ in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Welche Dimension hat der Lösungsraum dieses Systems?

b) [**6 Punkte**] Geben Sie die allgemeine reelle Lösung des in a) gefundenen Systems an.

c) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie die Lösung von $(*)$ zu den Bedingungen $y(0) = 1$, $y(\pi/4) = 1$.

Setze: $y = y_o, \quad y' = y_1, \quad y'' = -8y_0 + 4y_1$

System: $\begin{vmatrix} y' = y_1 \\ y'' = -8y_0 + 4y_1 \end{vmatrix} \rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 2 + 2i\,,\ \lambda_2 = 2 - 2i, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 - i \\ 4 \end{pmatrix} E_2 = \begin{pmatrix} 1 + i \\ 4 \end{pmatrix}$

Basisprüfung Sommer 2017

Allgemeine Lösung: Realteil und Imaginärteil

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = e^{(2+2i)t} \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$e^{2t} \cdot e^{2it} \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix} = e^{2t}\big(\cos(2t) + i \cdot sin(2t)\big) \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(2t) - i \cdot cos(2t) + i \cdot sin(2t) + \sin(2t) \\ 4\cos(2t) + 4i \cdot \sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Re}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} \cos(2t) + \sin(2t) \\ 4\cos(2t) \end{pmatrix}, \qquad Im\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2t) - \cos(2t) \\ 4\sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{y(t) = e^{2t}\big(C_1(\cos(2t) + \sin(2t)) + C_2((\sin(2t) - \cos(2t))\big)}$$