ANALYSIS II

Übungsstunde VII

Ablauf

- Intuitionsübung
- Nachbesprechung Serie 5 & 6
- Flussrechnungen
  - Repetition Parametrisierungen (Analysis I)
- Der Divergenzsatz von Gauss

Intuitionsübung

Oft berechnet man den Fluss eines Vektorfelds $\vec{v}$ durch eine Fläche S, indem man diese erst mit einer zusätzlichen Fläche S' zum Rand eines Volumens V (also $\partial V = S \cup S'$) erweitert und dann den Divergenzsatz anwendet:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \, \mathrm{d}V = \iint_{S \cup S'} \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}O = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}O + \iint_{S'} \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}O$$

$$\Longrightarrow \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}O = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \, \mathrm{d}V - \iint_{S'} \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}O$$

Wir wollen zusammen erarbeiten, mit welchen Tricks man diese Methode effizient und angenehm gestalten kann.

Also: **Worauf kann man alles achten, um die gesamte Berechnung zu vereinfachen? Schreiben Sie in den nächsten 2 Minuten eine stichwortartige Liste von Dingen, die Ihnen in den Sinn kommen!** Diese Liste muss natürlich nicht abschliessend sein, die Zeit ist knapp gewählt.

Intuitionsübung

Nehmen Sie sich **3 Minuten Zeit** für folgene Aufgabe:

- Vergleichen Sie Ihre Listen mit einer Person neben Ihnen und ergänzen Sie sie gegenseitig, wo es sinnvoll ist.
- Wählen Sie gemeinsam einen Eintrag und beschreiben Sie genauer, wie dies die Rechnung vereinfachen kann und worauf man dabei achten kann.
- Bereiten Sie sich gemeinsam darauf vor, dies kurz der Gruppe zu erklären.

Nachbesprechung Serie 5

2. Es seien $a, c > 0$ Konstanten. Das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = c\left(1 - a^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, -a^2 \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, 0\right)$$

beschreibt die Strömung einer idealen Flüssigkeit um einen senkrechten Zylinder vom Radius a, dessen Achse mit der z-Achse zusammenfällt (siehe dazu die Abbildung und eine animierte Visualisierung unter folgendem Link: `https://tinyurl.com/ethanalysis-laminarflow`).

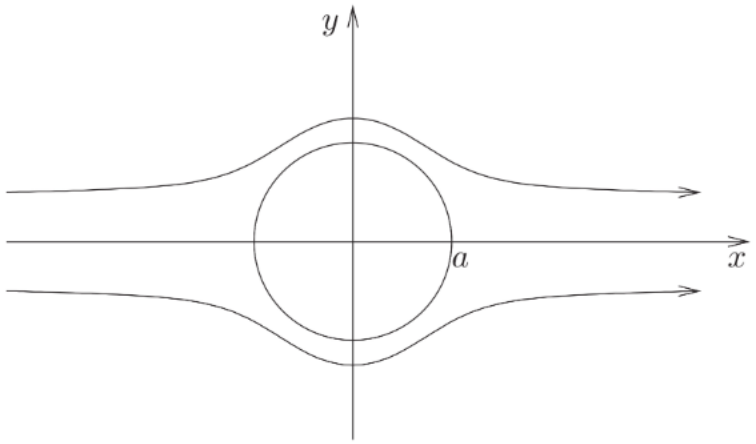
a) (❤) Zeigen Sie, dass $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ und

b) (❤) dass $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ gilt,

c) (❤) dass an der Oberfläche des Zylinders die Strömung tangential verläuft und

d) dass in grosser Entfernung vom Zylinder das Vektorfeld nahezu homogen ist.

e) Bestimmen Sie ausserdem die Punkte maximaler und minimaler Geschwindigkeit auf der Zylinderoberfläche.



Nachbesprechung Serie 5

- Zwei Möglichkeiten:
  - Zeigen, dass der Ortsvektor $\vec{r}$ senkrecht auf dem Vektorfeld steht

    $\Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{v} = 0$ (nur möglich, da der Tangentialvektor senkrecht auf dem Ortsvektor steht)
  - Zeigen, dass die Richtung des Tangentialvektors und die des Vektorfelds identisch sind

    $\Rightarrow \vec{v} = f \cdot \vec{t}$, f ist ein skalarer Faktor (Oft auch einfach zu zeigen, dass $\vec{v} \times \vec{t} = \vec{0}$ gilt)

- Es kann hilfreich sein, eine Koordinatentransformation auf das Vektorfeld anzuwenden. (hier z. B. Polarkoordinaten)

Nachbesprechung Serie 5

2. Es seien $a, c > 0$ Konstanten. Das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = c\left(1 - a^2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, -a^2\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, 0\right)$$

Polarkoord. $\vec{r} = \begin{pmatrix} a\cdot\cos\varphi \\ a\cdot\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \vec{v} = c\begin{pmatrix} 1 - a^2\dfrac{a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{a^4} \\ -a^2\dfrac{2\cdot a^2\cos\varphi\sin\varphi}{a^4} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{c}\begin{pmatrix} 1-\cos^2\varphi+\sin^2\varphi \\ -2\cdot\cos\varphi\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{c}\begin{pmatrix} 2\sin^2\varphi \\ -2\cdot\cos\varphi\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

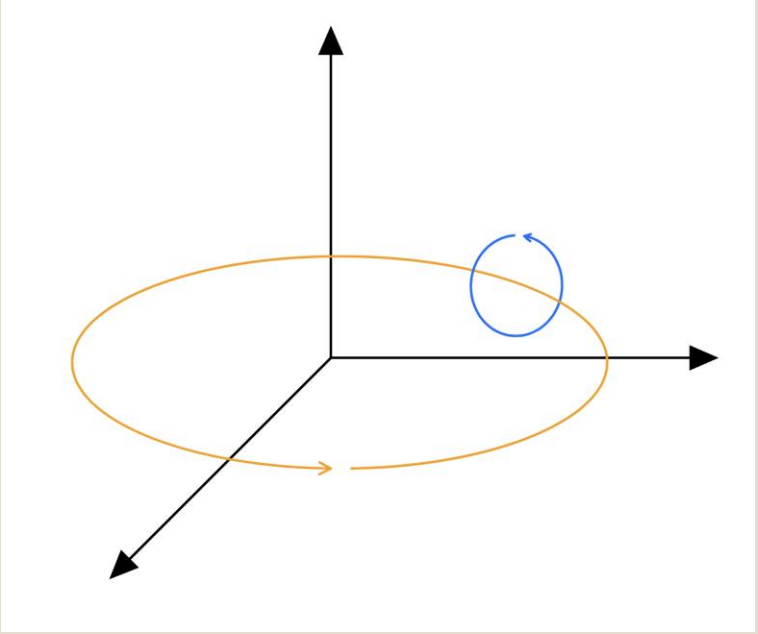
$$\dot{\vec{r}}\times\vec{v} = \begin{pmatrix} -a\cdot\sin\varphi \\ a\cdot\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\times\mathrm{c}\begin{pmatrix} 2\sin^2\varphi \\ -2\cdot\cos\varphi\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 2ac\cdot\ sin^2\varphi\cdot\cos\varphi\ - 2ac\cdot\ sin^2\varphi\cdot\cos\varphi \end{pmatrix} = \vec{0}$$

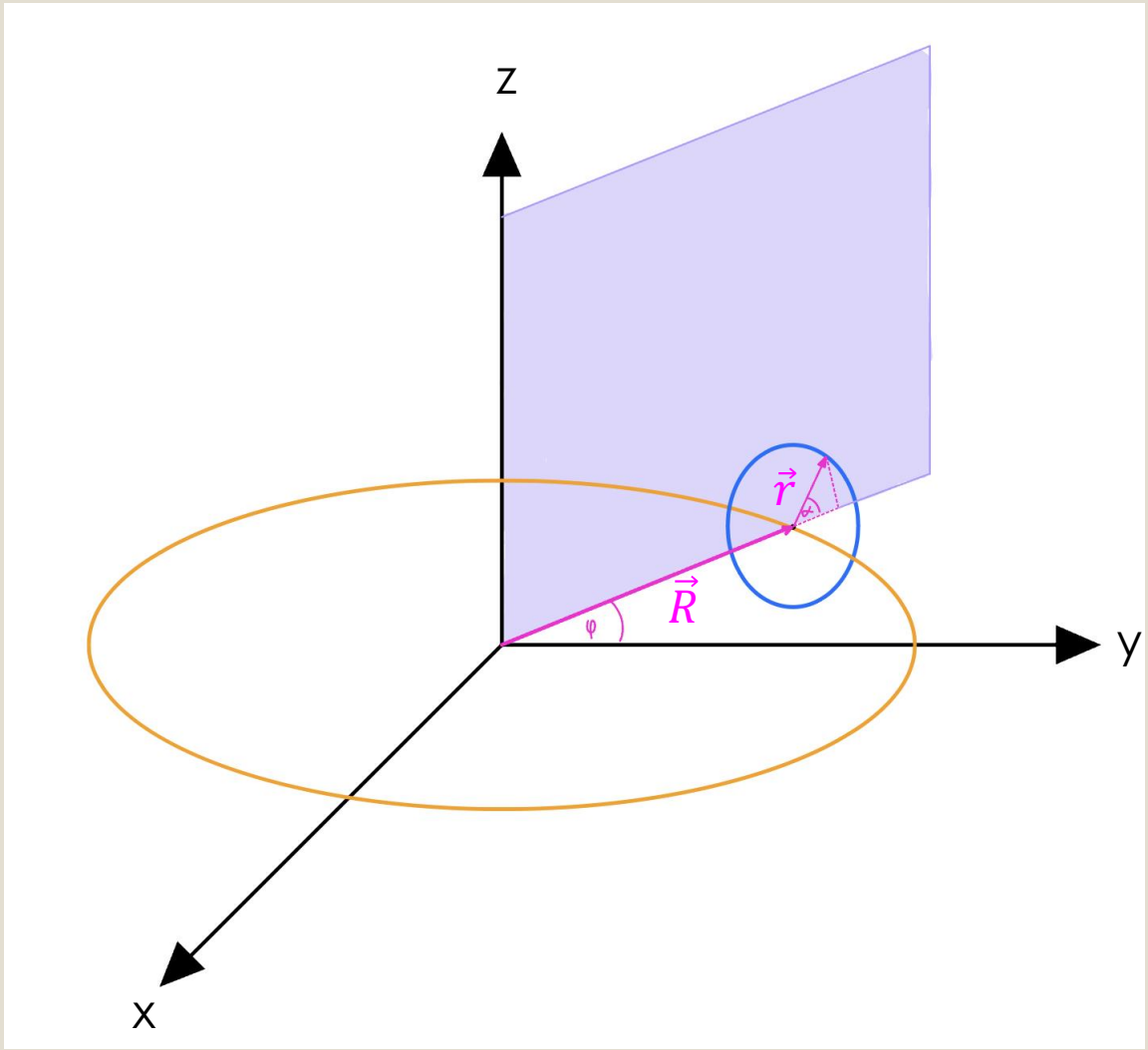
Nachbesprechung Serie 6 – Aufgabe 2

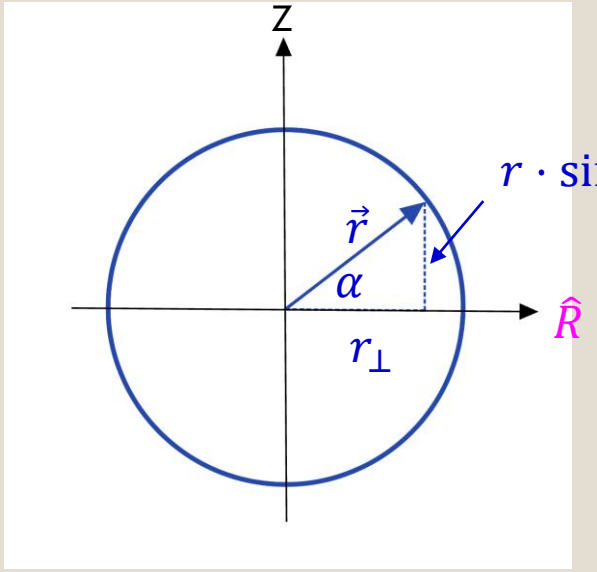
Wie findet man die Parametrisierung eines komplizierteren Körpers ? – Bsp. Torus

Der Torus lässt sich als eine gekoppelte Parametrisierung zweier Kreise darstellen

Um die Terme der Parametrisierung für (x, y, z) zu finden, zeichnet man einen allgemeinen Vektor zu einem Punkt auf dem Körper/der Oberfläche und zerlegt diesen nach seinen einzelnen Komponenten







Wir beginnen mit der z-Komponente der Parametrisierung.

Nur der kleine blaue Kreis trägt zur z-Komponente bei, da sich der grosse Kreis nur in der xy-Ebene befindet.

Die z-Komponente des kleine Kreise lautet

$$z = r \cdot \sin(\alpha)$$

Die Komponente des Vektors $\vec{r}$ in der xy-Ebene lautet:

$$r_\perp = r \cdot cos(\alpha)$$

$r_\perp$ gibt nur die Länge der Komponente in der xy-Ebene an.

Nicht die Richtung!

Zusammensetzung der Parametrisierung

Da in $r_\perp$ die selbe Richtung wir $\vec{R}$ zeigt und $\vec{R}$ die normale Kreisparametrisierung besitzt:

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\varphi) \\ R \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Können wir die Richtung von $r_\perp$ auch über den $\cos(\varphi)$ & $\sin(\varphi)$ festlegen.
(Würden wir dies nicht tun, wäre der kleine Kreis immer parallel zur x-Achse)

Die Gesamte Parametrisierung lautet dann:

$$\vec{P}(\alpha, \varphi) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\varphi) \\ R \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r \cdot \cos\alpha) \cdot \cos(\varphi) \\ (R + r \cdot \cos\alpha) \cdot \sin(\varphi) \\ r \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Flussrechnungen

Satz. *Seien ein Vektorfeld $\vec{v}$ und eine Fläche S mit Parametrisierung $\vec{r}(u,v)$ sowie eine ausgezeichnete Richtung gegeben. Wenn $\vec{n}$ der Normaleneinheitsvektor auf S in die ausgezeichnete Richtung ist, dann ist der* ***Fluss Φ von $\vec{v}$ durch S in Richtung $\vec{n}$*** *gegeben durch*

$$\Phi = \iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, \mathrm{d}O = \pm \iint_B \vec{v}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\overrightarrow{r_u}(u,v) \times \overrightarrow{r_v}(u,v)) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

Dabei muss das Vorzeichen $\pm$ so gewählt werden, dass $\pm\,(\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})$ in Richtung $\vec{n}$ zeigt.

$\vec{v} \cdot \vec{n}$ berechnet den parallelen Anteil zwischen $\vec{v}$ & $\vec{n}$

r(u,v) : Parametrisierung der Oberfläche

Wie bestimmt man die Richtung von ($\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}$) ?

Single Choice BP 2019

18. (VI) Sei $\vec{v}$ ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$, dessen Feldlinien Geraden parallel zur xy-Ebene sind und sei E die Einheitskreischeibe in der xy-Ebene. Welche Aussage über den Fluss von $\vec{v}$ durch E von unten nach oben ist korrekt?

(a) Der Fluss ist null.

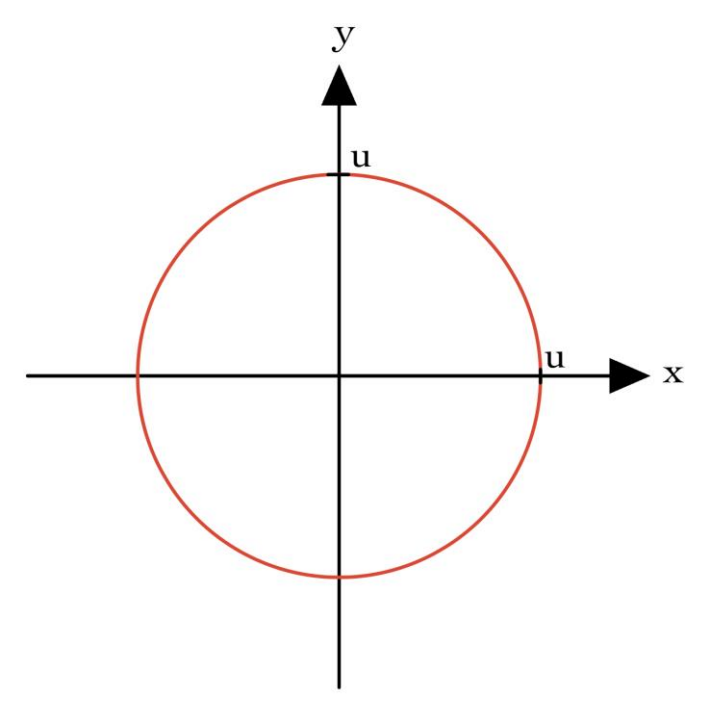
(b) Der Fluss ist negativ.

(c) Der Fluss ist positiv.

(d) Die gegebenen Angaben genügen nicht, um eine Aussage über das Vorzeichen des Flusses zu schliessen.

Repetition Analysis I

$\vec{r} = u \cdot \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$ $\vec{r} = u \cdot \begin{pmatrix} \sin(v) \\ \cos(v) \end{pmatrix}$ $\vec{r} = u \cdot \begin{pmatrix} \cos(v) \\ -\sin(v) \end{pmatrix}$ $\vec{r} = u \cdot \begin{pmatrix} -\sin(v) \\ -\cos(v) \end{pmatrix}$ $v \in [0,2\pi]$

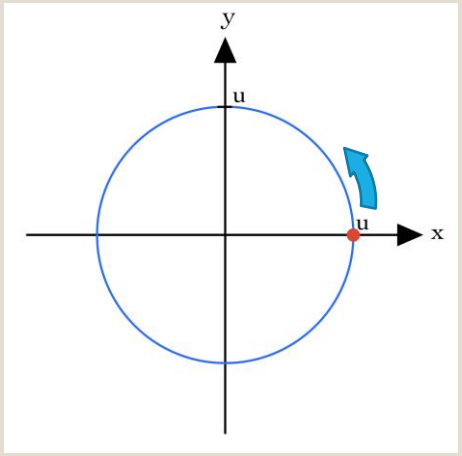


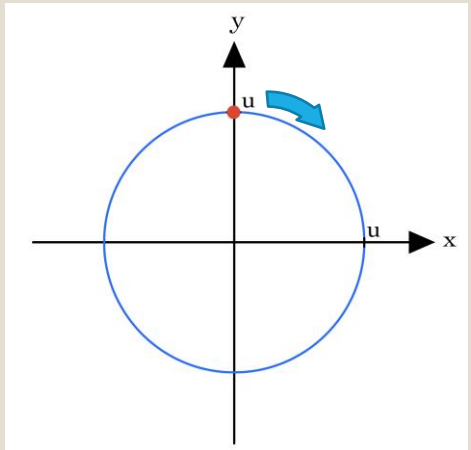
Repetition Analysis I

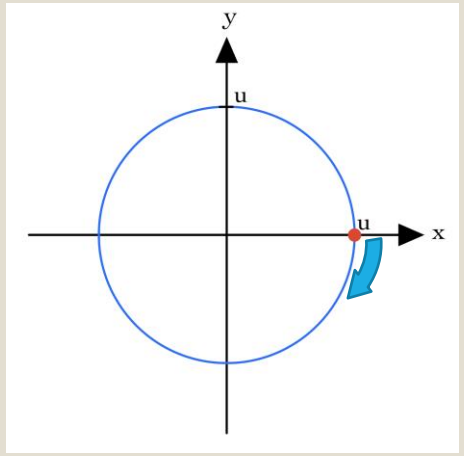
● Startpunkt

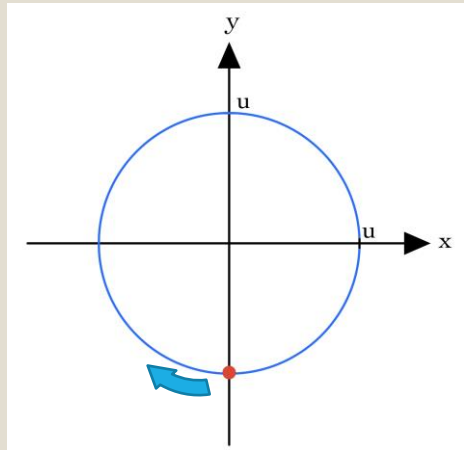
Durchlaufsinn

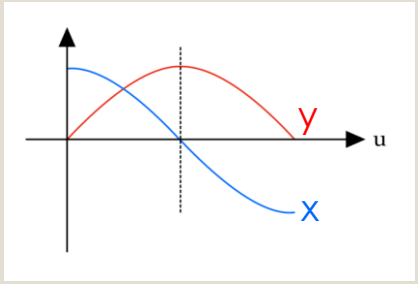
$\vec{r} = u \cdot \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$ $\vec{r} = u \cdot \begin{pmatrix} \sin(v) \\ \cos(v) \end{pmatrix}$ $\vec{r} = u \cdot \begin{pmatrix} \cos(v) \\ -\sin(v) \end{pmatrix}$ $\vec{r} = u \cdot \begin{pmatrix} -\sin(v) \\ -\cos(v) \end{pmatrix}$ $v \in [0,2\pi]$

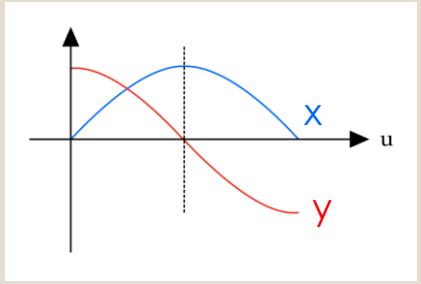


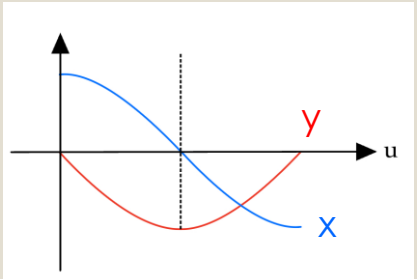


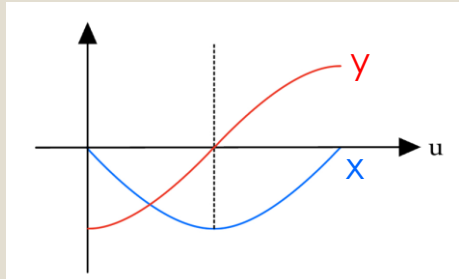








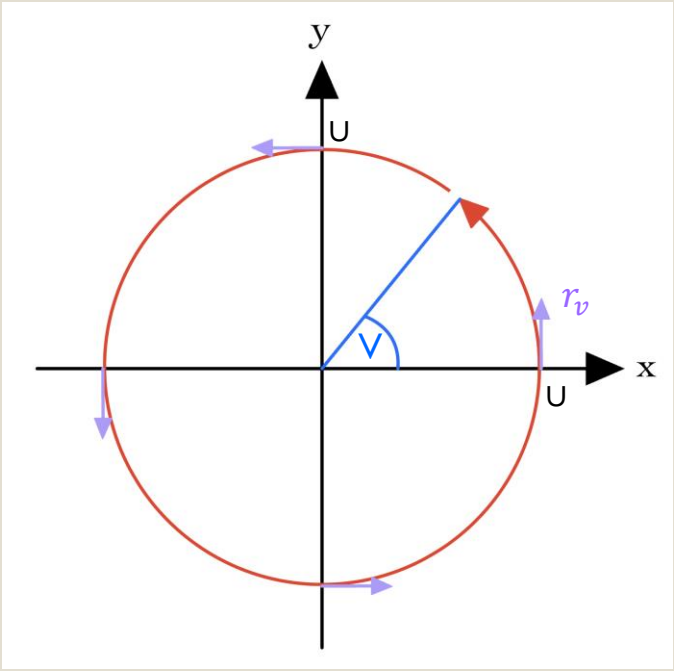




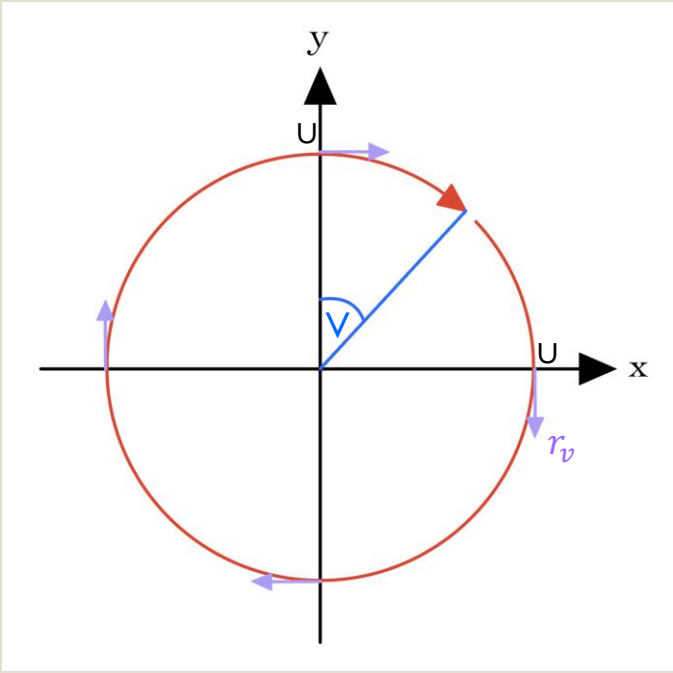
Rechte-Hand-Regel / Punkt einsetzen

- Parametrisierungen besitzt eine Durchlaufrichtung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} u \cdot \cos(v) \\ u \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$$



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} u \cdot \sin(v) \\ u \cdot cos(v) \end{pmatrix}$$



Rechte-Handregel

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} u \cdot \cos(v) \\ u \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$$

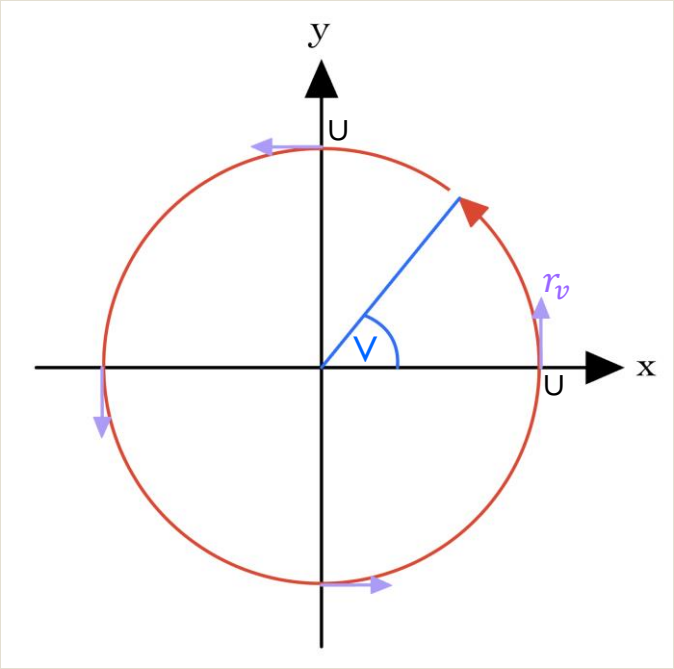


Abb. 1

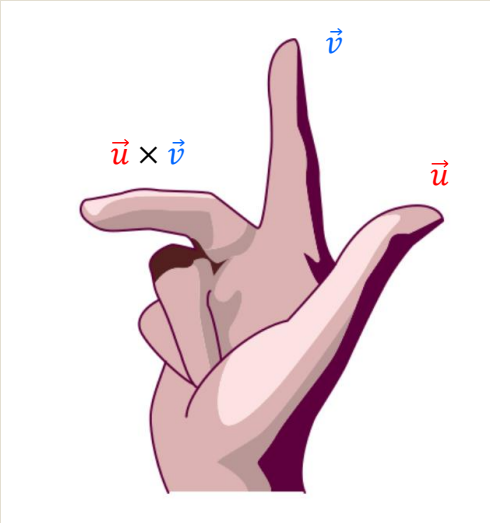


Abb. 2

Abb. 1: https://lp.uni-goettingen.de/get/text/4940 Abb. 2: https://www.einstein-online.info/spotlight/felder/

Single Choice BP Winter 2021

14. (VI) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon (x, y, z) \mapsto (e^x xy, y^2 - 3, -z)$$

und die Einheitskreisscheibe $D := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ in der x, y-Ebene. Welche Aussage über den Fluss von $\vec{v}$ durch D von unten nach oben ist korrekt?

(a) Der Fluss ist negativ.

(b) Der Fluss ist positiv.

(c) Der Fluss ist 0.

(d) Der Fluss ist nicht wohldefiniert, da keine Umlaufrichtung des Einheitskreises angegeben wurde.

SC Basisprüfung Sommer 2018

25. (Vorzeichen eines Flusses SC) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x^2 + yz, y)$$

und das Dreieck D mit Ecken $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$. Welche Aussage über den Fluss von $\vec{v}$ durch D von oben nach unten ist korrekt?

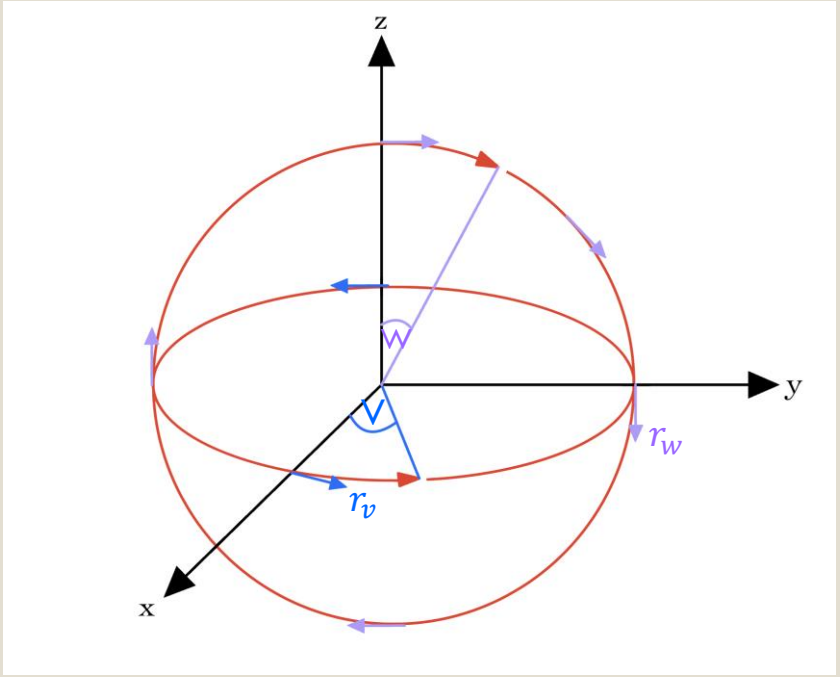
(a) Der Fluss ist negativ.

(b) Der Fluss ist 0.

(c) Der Fluss ist positiv.

(d) Der Fluss ist nicht definiert, da keine Parametrisierung $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ des Dreiecks D angegeben ist.

Beispiel Kugel



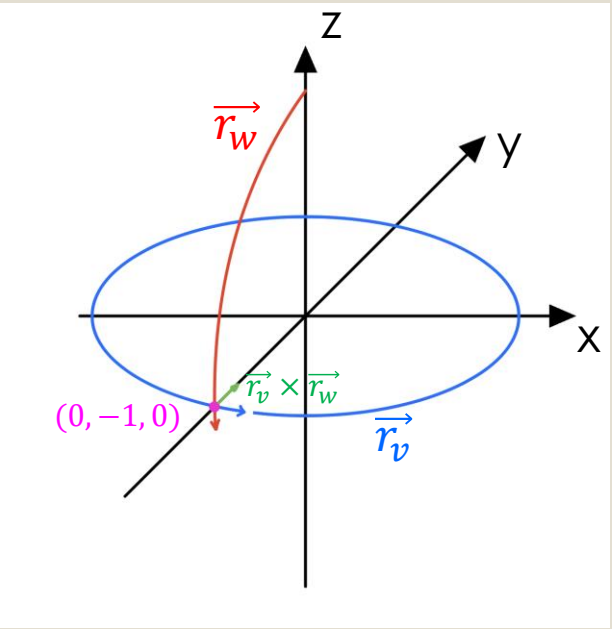
$$\vec{r}(v,w) = R \cdot \begin{pmatrix} \sin(\mathrm{w}) \cdot \cos(v) \\ \sin(\mathrm{w}) \cdot \sin(v) \\ \cos(w) \end{pmatrix}$$

Betrachtet man den Punkt $(0,-1,0)$, so kann dieser mit der Parametrisierung folgendermassen dargestellt werden: $\vec{r}\left(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$(\&\ \vec{r}\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow \notin\ Konvention\ v \in [0,2\pi], w \in [0,\pi])$

Im Punkt $\vec{r}\left(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ zeigt $\overrightarrow{r_v}$ in die positive x-Richtung und $\overrightarrow{r_w}$ in die negative z-Richtung.

Es folgt: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$



Divergenzsatz von Gauss

Satz (Divergenzsatz von Gauss). *Seien $\vec{v}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $B \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Volumen mit $B \subset D(\vec{v})$. Sei die Fläche $S = \partial B$ der* ***Rand von B****. Dann ist der Fluss Φ von $\vec{v}$ durch $S = \partial B$ nach aussen gegeben durch*

$$\Phi = \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}O = \iiint_{B} \operatorname{div} \vec{v} \, \mathrm{d}V.$$

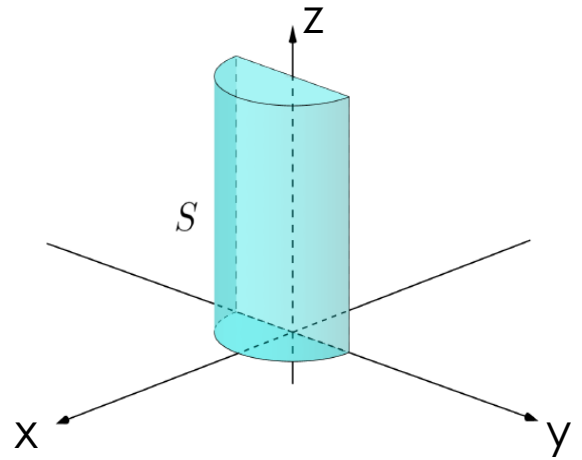
- Kein Normalenvektor, Volumenelement statt Oberflächenelement

  $\Longrightarrow$ Analog zu Kapitel 5: Koordinatentransformationen, Volumenintegrale

Wichtig: Die Richtung des Flusses ist im Divergenzsatz vorgegeben: Von Innen nach Aussen

Korollar: Gilt $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$, so verschwindet jeder Fluss durch eine **geschlossene** Oberfläche

3. Ein gerader Hohlzylinder (inklusive Boden und Deckel) mit Radius 1 und Höhe 3 stehe im Koordinatenuntersprung. Durch einen Schnitt der senkrechten Ebene $x = 0$ entsteht im Teilraum mit $x > 0$ eine Fläche S in Form eines halben Hohlzylinders.



Gegeben sei ausserdem ein Vektorfeld $\vec{v}$:

$$\vec{v}(x, y, z) = \left(x + 1, y, z^2 + 1\right).$$

Bestimmen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch S, wobei der Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ von innen nach aussen zeige.

Beispiel zur Anwendung des Divergensatzes

- Volumen wäre einfach zu parametrisieren, ist aber nicht geschlossen
- Bevor der Satz von Gauss angewandt werden kann, muss das Volumen mit einem Rechteck als Rückwand geschlossen werden.

Beispiel zur Anwendung des Divergensatzes

- Parametrisierung des Volumens: $\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$, $r \in [0,1] \quad \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad z \in [0,3]$
- $\mathrm{div}(\vec{v}) = 1 + 1 + 2\mathrm{z} = 2(\mathrm{z} + 1)$

$$\Phi_{HZ} = 2 \cdot \int_0^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (z+1) \cdot r \, dr \, d\varphi \, dz = \frac{15\pi}{2}$$

Beispiel zur Anwendung des Divergensatzes

- Normaleneinheitsvektor des Rechtecks von Innen nach Aussen: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Fluss durch das Rechteck:

$$\Phi_{\mathrm{R}} = \int_0^3 \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 0+1 \\ y \\ z^2+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dy\, dz = -\int_0^3 \int_{-1}^1 1\, dy\, dz = -6$$

Totaler Fluss:

$$\Phi_{tot} = \Phi_{HZ} - \Phi_{\mathrm{R}} = \frac{15\pi}{2} + 6$$

Beispielaufgabe BP Sommer 2022

Frage 24 Sei S die im 1. Oktanten $(x, y, z \geq 0)$ liegende Teilfläche der Einheitshohlkugel und $\vec{v} = (xyz, y^2z, yz^2)$. Bestimmen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch S vom Ursprung weg.