ANALYSIS II

Übungsstunde IX

Ablauf

- Intuitionsübung von letzter Woche
- Nachbesprechung Serie 8
- Potentialfelder
- Konservative Vektorfelder
- Einfach zusammenhängende Räume
- Differentialgleichungen
  - Einführung
  - Richtungsfeld
  - Existenzsatz
  - Feldlinien
  - Methode der Separation der Variablen

Intuitionsübung

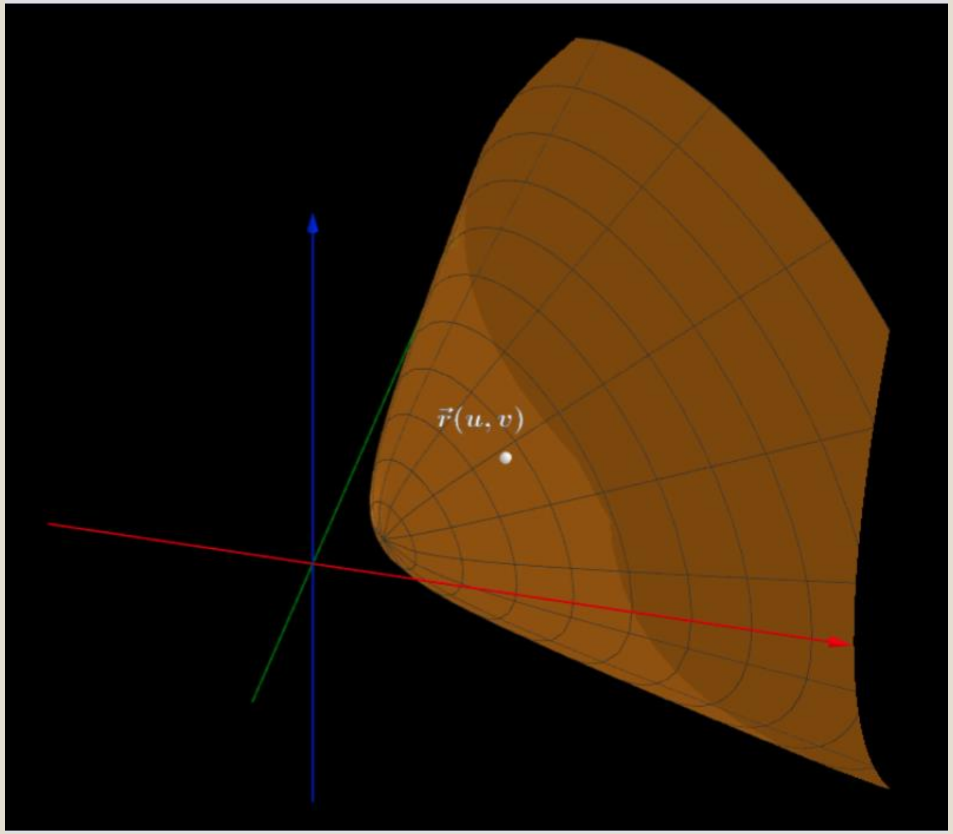
Bei der Flussrechnung durch eine parametrisierte Fläche muss man jeweils entscheiden, ob der Normalenvektor der Parametrisierung bereits der Flussrichtung entspricht oder ob noch ein (negatives) Vorzeichen eingefügt werden muss. Wir wollen dies hier anhand eines Beispiels üben.

Gegeben sei die Fläche $S : xy = z^2 + 1$ mit Parametrisierung

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{u^2+1} - u\cos(v) \\ \sqrt{u^2+1} + u\cos(v) \\ u\sin(v) \end{pmatrix}, \qquad u > 0, \quad v \in [0, 2\pi].$$

Die Parametriserung erfüllt

$$\vec{r}_u = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} - \cos v \\ \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} + \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_v = \begin{pmatrix} u\sin v \\ -u\sin v \\ u\cos v \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{pmatrix} u + \frac{u^2\cos v}{\sqrt{u^2+1}} \\ u - \frac{u^2\cos v}{\sqrt{u^2+1}} \\ \frac{-2u^2\sin v}{\sqrt{u^2+1}} \end{pmatrix}.$$



Nun zu den Aufgaben **für die folgenden 4 Minuten**:

- Der Fluss soll von der z-Achse weg erfolgen. Entscheiden Sie, ob $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ dieser Richtung entspricht oder ob ein Vorzeichenwechsel nötig ist!
- Für den Rest der Zeit: Wie haben Sie Ihre Entscheidung getroffen? Beschreiben Sie Ihr Vorgehen und notieren Sie sich weitere Möglichkeiten/Strategien, wie man diese Frage in passenden, anderen Beispielen finden könnte.

Intuitionsübung

Nehmen Sie sich **3 Minuten Zeit** für folgene Aufgabe:

- Vergleichen Sie Ihr Resultat sowie Ihre Entscheidungsmöglichkeiten/Strategien mit einer Person neben Ihnen und ergänzen Sie sie gegenseitig, wo es sinnvoll ist.
- Wählen Sie gemeinsam einen Eintrag und beschreiben Sie genauer, wie man damit das Vorzeichen bestimmt und worauf man dabei achten kann.
- Bereiten Sie sich gemeinsam darauf vor, dies kurz der Gruppe zu erklären.

Lösung –Variante 1

Betrachtet man $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$:

$$(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = \begin{pmatrix} \mathrm{u} + \dfrac{\mathrm{u}^2 \cdot \cos(v)}{\sqrt{u^2+1}} \\ \mathrm{u} - \dfrac{\mathrm{u}^2 \cdot \cos(v)}{\sqrt{u^2+1}} \\ \dfrac{-\,\mathrm{u}^2 \cdot \sin(v)}{\sqrt{u^2+1}} \end{pmatrix},$$

so sieht man, dass die x & y-Komponenten nie kleiner als Null werden können, da

$$u > \frac{\mathrm{u}^2 \cdot \cos(v)}{\sqrt{u^2+1}}$$

Für alle u & v gilt. D.h. der Vektor schaut immer in positive x & y-Richtung und daher von der z-Achse weg.

Lösungen – Variante 2

Beim Betrachten der Parametrisierung fällt auf, dass u eine Länge (~ Radius) und v eine Drehbewegung darstellt.

Betrachtet man nur was in der xz-Ebene geschieht (d.h. y = 0) erhält man:

$$\vec{r}_{xz}(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{u^2+1} - u \cdot \cos(v) \\ 0 \\ u \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$$

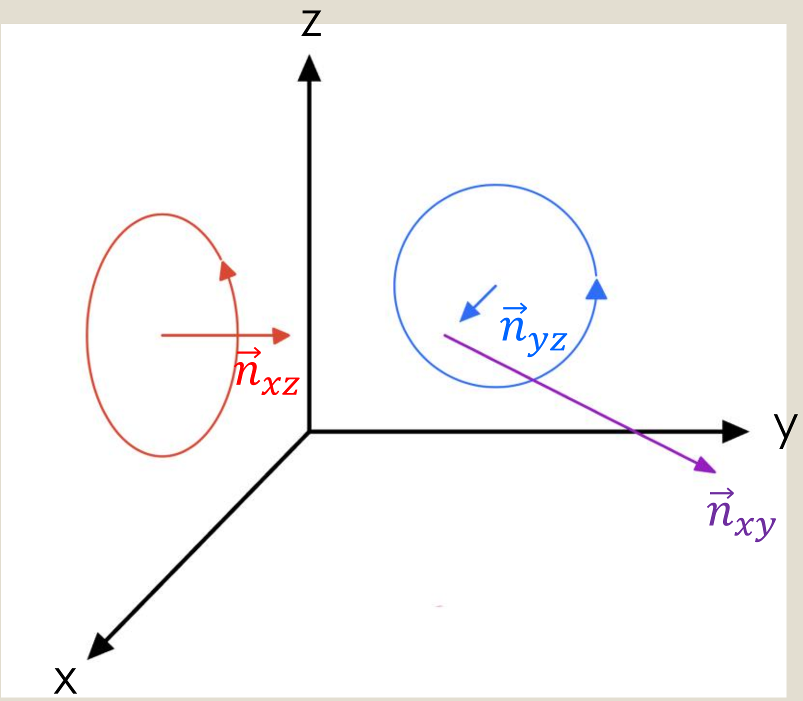
Unabhängig vom radialen Term beschreibt dies so etwas wie eine Drehbewegung im Gegenuhrzeigersinn in der xz-Ebene.

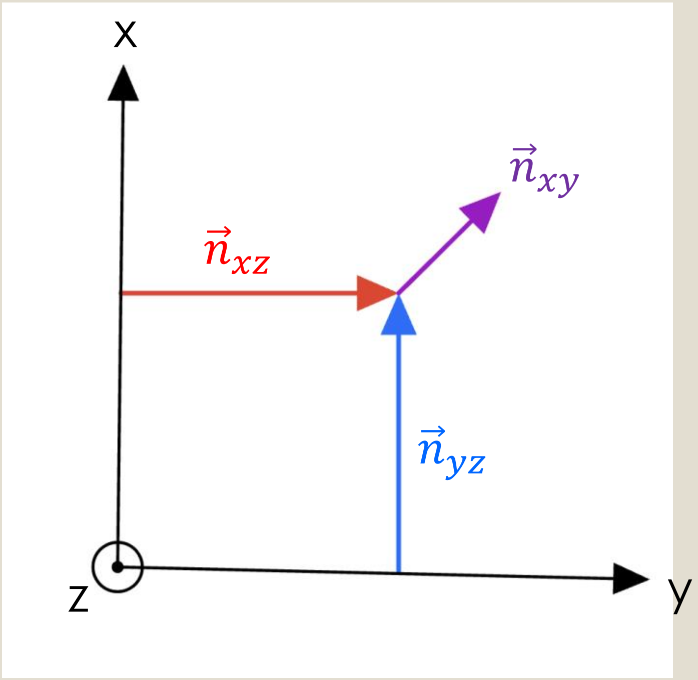
Analog erhält man in der yz-Ebene: $\vec{r}_{yz}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{u^2+1} + u \cdot \cos(v) \\ u \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$ → Eine Kreisbewegung in der yz-Ebene auch im Gegenuhrzeigersinn.

Lösungen – Variante 2

Die normalen Vektoren dieser beiden Kreise zeigen in die positive y & x-Richtung.

Somit zeigt der Resultierende Normalenvektor von der z-Achse weg.





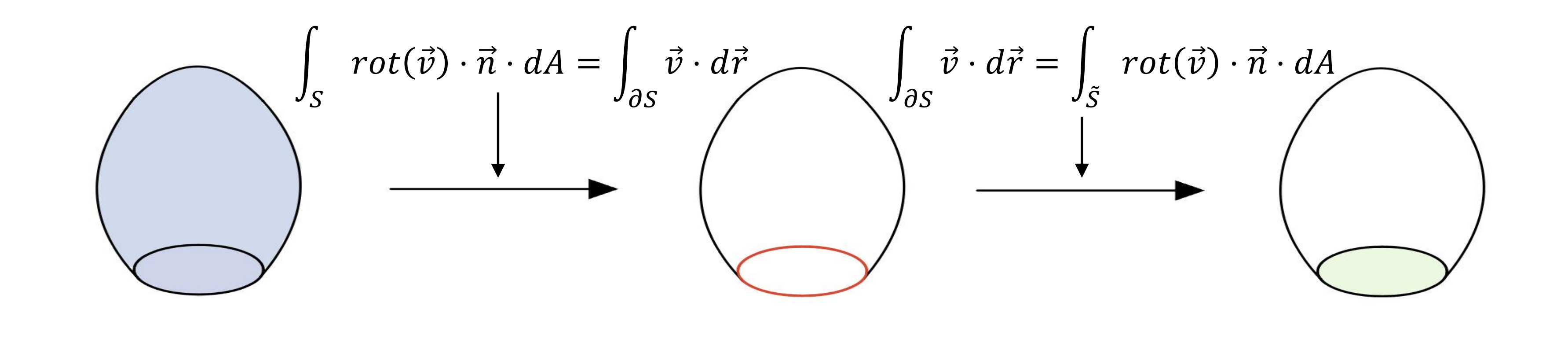
Nachbesprechung Serie 8

4. (a) Berechnen Sie das Integral $\Phi = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$, wobei $\vec{F}(x, y, z) = (yz, -xz, xy)$ ist und

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 8z^2 = 1, z \geq 0\},$$

einen Teil der Oberfläche des Ellipsoids bezeichnet. Die Normale zeigt nach oben.
Benutzen Sie dazu den Satz von Stokes zweimal (einmal in jede Richtung), um das Integral über die Fläche S in ein Integral über eine Fläche $\widetilde{S}$ umzuformen, welches einfacher zu berechnen ist.

(b) Benutzen Sie den Satz von Stokes, um Φ via Wegintegral zu berechnen.

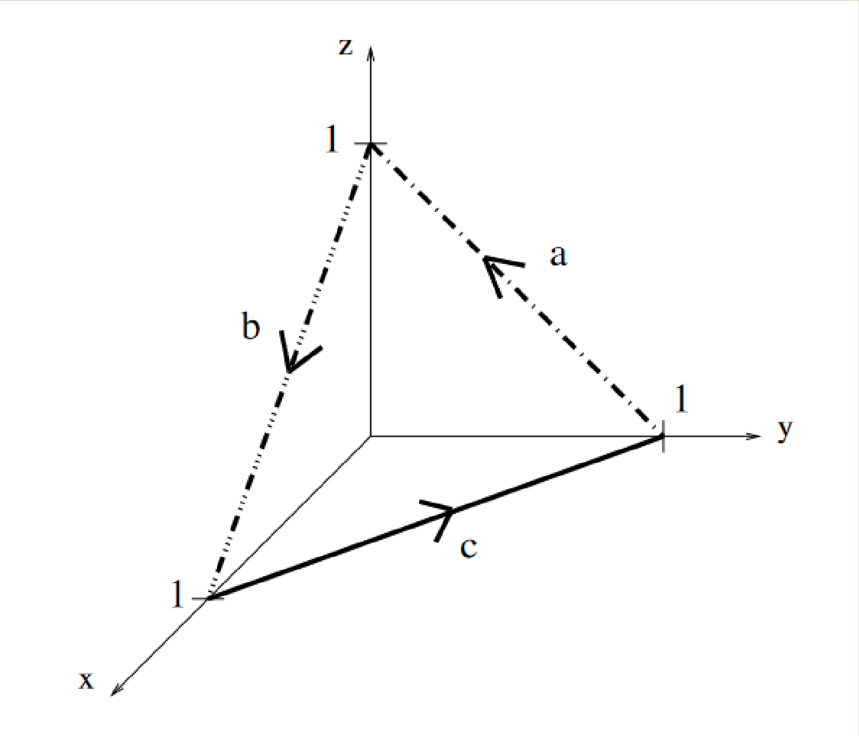


Anmerkung zu Parametrisierungen (Serie 8 Aufgabe 1)

Eine Parametrisierung ist nur dann vollständig, wenn ein Definitionsintervall für die Parameter angegeben wird.

Beispiel Weg A: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad t \in [1, 0]$

Dieselbe Parametrisierung ist für $t \in [0,1]$ falsch



Potentialfelder

- Ein Vektorfeld dessen Komponenten v_1 & v_2 & v_3 die partiellen Ableitungen einer Funktion sind, nennt man **Potentialfeld** und die dazugehörige Funktion ist ein **Potential**.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

Ein Potentialfeld wird auch **Gradientenfeld** genannt.

Das dazugehörige Potential kann über eine Integration der einzelnen Komponenten und einen anschliessenden Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

Integrabilitätsbedinungen gelten auch hier!

Konservative Vektorfelder

Satz. *Ein Vektorfeld $\vec{v}$ ist genau dann konservativ, wenn es ein Potentialfeld ist.*

- Ein Vektorfeld ist konservativ, wenn die Arbeit nur vom Start- & Endpunkt abhängt, aber nicht von dem Weg der die beiden Punkte verbindet.

- Im Speziellen gilt, dass die Arbeit entlang von <u>allen</u> geschlossenen Wegen verschwindet, da der Startpunkt gleichzeitig auch der Endpunkt ist.

$\Rightarrow$ Konservative Felder sind wirbelfrei

Aber aus $rot(\vec{v}) = 0$ folgt nicht, dass das Vektorfeld konservativ ist

Basisprüfung Sommer 2022

Frage 18 (VI) Für welchen Wert von $a \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $\vec{v}(x, y) = (ax \sin y, (y + x^2 + a^2) \cos y)$ konservativ?

A $a = 1$

B $a = -2$

C $a = 2$

D $a = 0$

Lösung Basisprüfung Sommer 2022

- Rotation berechnen

$$rot(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ax \cdot sin(y) \\ (y + x^2 + a^2) \cdot \cos(y) \end{pmatrix}$$

$$= 2x \cdot \cos(y) - ax \cdot \cos(y) =! \ 0$$

$$\Rightarrow a = 2$$

Arbeitsberechnungen in einem Potentialfeld

Die Arbeit in einem Potentialfeld entlang einem Weg vom Startpunkt S zum Endpunkt E ist durch die Formel:

$$A = f(E) - f(S)$$

Wobei f das Potential (die Funktion) des Potentialfelds ist.

Basisprüfung Winter 2018

7. **Single Choice.** Es sei γ ein geschlossener Weg in der Ebene und $\vec{v}$ ein Vektorfeld. Die Arbeit von $\vec{v}$ entlang γ sei 2. Welche Eigenschaft kann $\vec{v}$ besitzen?

   (a) $\vec{v}$ ist quellenfrei.

   (b) $\vec{v}$ ist wirbelfrei.

   (c) $\vec{v}$ ist ein Potentialfeld.

Einfach zusammenhängende Räume

Sind Wirbelfreie Vektorfelder auch Potentialfelder, da die Arbeit entlang geschlossenen Wegen verschwindet?

→ Nur wenn der Definitionsbereich des Vektorfelds einfach zusammenhängend ist.

Einfach zusammenhängend:

Jeder geschlossene Weg muss innerhalb von $D(\vec{v})$ zu einem Punkt zusammengezogen werden können.

Einfach zusammenhängende Räume

Merkhilfe:

« In einem einfach zusammenhängenden Raum möchte man sein Velo nicht abschliessen (da das Veloschloss immer abgestreift werden kann) »

Beispiel: einfach zusammenhängende Räume:

- $\mathbb{R}^3 \setminus$ {Kugel(-oberfläche)}

(ein geschlossener Weg innerhalb und ausserhalb der Kugeloberfläche kann auf einen Punkt zusammengezogen werden)

Beispiel: **nicht** einfach zusammenhängende Räume:

- $\mathbb{R}^3 \setminus$ {Torus}
- $\mathbb{R}^3 \setminus$ {Gerade}

Basisprüfung Sommer 2020 (MC)

9. (VI) Sei $\vec{v}$ ein wirbelfreies Vektorfeld mit $D(\vec{v}) = \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie, welche der folgenden Aussagen *sicher wahr* sind.

   (a) Es existiert ein Potential $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \operatorname{grad} f$.

   (b) $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} \equiv 0$.

   (c) Die Arbeit entlang eines Weges $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ hängt nur vom Start- und Endpunkt ab, nicht aber vom Weg selbst.

   (d) Der Fluss $\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}O$ aus einer geschlossenen Oberfläche S hinaus ist immer 0.

Basisprüfung Winter 2020

7. (VI) Sei $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ein Potentialfeld mit Potential f. Welche Aussagen sind richtig?

(a) $\frac{\partial}{\partial y} v_1 = \frac{\partial}{\partial x} v_2$, $\frac{\partial}{\partial x} v_3 = \frac{\partial}{\partial z} v_1$, $\frac{\partial}{\partial y} v_3 = \frac{\partial}{\partial z} v_2$.

(b) Der Definitionsbereich von $\vec{v}$ ist einfach zusammenhängend.

(c) div $\vec{v} = 0$.

(d) rot $\vec{v}$ ist ein Potentialfeld.

$\vec{v}$ ist ein Potentialfeld $\Rightarrow rot(\vec{v}) = 0$

$\Leftarrow$

Nur wenn, $D(\vec{v})$ einfach zusammenhängend ist

Basisprüfung Winter 2019 (MC)

8. (Vektorfelder MC) Gegeben sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ definiert auf $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Für welche der folgenden Bedingungen ist $\vec{v}$ konservativ? Kreuzen Sie "Wahr" an, wenn aus der Bedingung folgt, dass $\vec{v}$ konservativ ist, und "Falsch", wenn dies nicht immer gilt.

   (a) Für alle geschlossenen Wege W in U verschwindet die Arbeit von $\vec{v}$ entlang W.

   (b) Es gilt $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ für eine Skalarfunktion $f : U \to \mathbb{R}$.

   (c) Es gilt $\operatorname{rot} \vec{v} = (0, 0, 0)$.

   (d) Es gilt $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Kapitel VII

Differentialgleichungen

$\boxed{\text{Differentialgleichungen: Gleichungen, die Funktionen und deren Ableitungen enthalten.}}$

Eine “normale“ Gleichungen wird für eine konstanten skalaren Wert gelöst:

$$x - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 5$$

Von nun an möchten wir Gleichungen für Funktionen lösen und nicht für einzelne skalare Werte:

$$x(t) = \dot{x}(t) \rightarrow x(t) = e^{t}$$

$$x(t) = \ddot{x}(t) \rightarrow x(t) = e^{t}, \mathrm{sinh(t)}, \mathrm{cosh(t)}$$

$$x(t) = -\ddot{x}(t) \rightarrow x(t) = \sin(t), \cos(t)$$

Uneindeutigkeit der Lösung

Betrachten wir nochmal die DGL $x(t) = \dot{x}(t)$ so sehen wir, dass die nicht nur die Funktion $x(t) = e^t$ die Gleichung löst sondern auch die Funktion $x(t) = 5 \cdot e^t$ oder $x(t) = 2023 \cdot e^t$

Jede Funktion $C \cdot e^t,\ C \in \mathbb{R}$ löst diese DGL.

$\Rightarrow$ Die Lösung $C \cdot e^t,\ C \in \mathbb{R}$ wird die allgemeine Lösung genannt

Eine Lösung für ein spezifisches $C \in \mathbb{R}$ wird spezielle Lösung genannt. Das spezifische C geht dabei aus dem Anfangswertproblem (AWP) hervor.

Wählen wir zum Beispiel für unsere Lösung die zusätzliche Bedingung $x(0) = 5$ und wenden diese auf unsere allgemeine Lösung an, folgt $x(0) = 5 = C \cdot e^0 \Rightarrow C = 5$

$x(t) = C \cdot e^t, \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung zur DGL $x(t) = \dot{x}(t)$

$x(t) = 5 \cdot e^t$ ist die spezielle Lösung zur DGL $x(t) = \dot{x}(t)$ mit dem AWP $x(0) = 5$

Arten von Differentialgleichungen & Ausblick

Gewöhnliche Differentialgleichungen / DGL / ODE (ordinary differential equation):

- Die Lösungen, die gesucht werden sind Funktionen einer Variable x(t) zu einer Gleichung $F\left(t,\ x(t), x', x'', \dots, x^{(n)}\right) \equiv 0$

Analysis II & viele weitere Fächer

Partielle Differentialgleichungen / PDE (partial differential equations):

- Die Lösungsfunktion beinhaltet (mindestens) zwei Variablen u(x,t)

  $\text{Bsp: } \Delta u = 0$ (mehrdimensionale Laplace-Gleichung)

Teil von Analysis III

Spezielle Differentialgleichungen:

- Beispielsweise Schrödingergleichung: PDE gekoppelt mit einem Eigenwertproblem

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r},t)\right]\psi(\vec{r},t)$$

Quant. Mech.

Charakterisierung von DGL's

Die Ordnung der DGL ist identisch zur höchsten vorkommenden Ableitung

Bsp: $x + c - \dot{x} = \ddot{x} + ab^3 \rightarrow (inhomogene)\ DGL\ 2.\ Ordnung$

Das Richtungsfeld einer DGL 1. Ordnung:

Eine DGL 1. Ordnung hat die Form $F\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) \equiv 0$

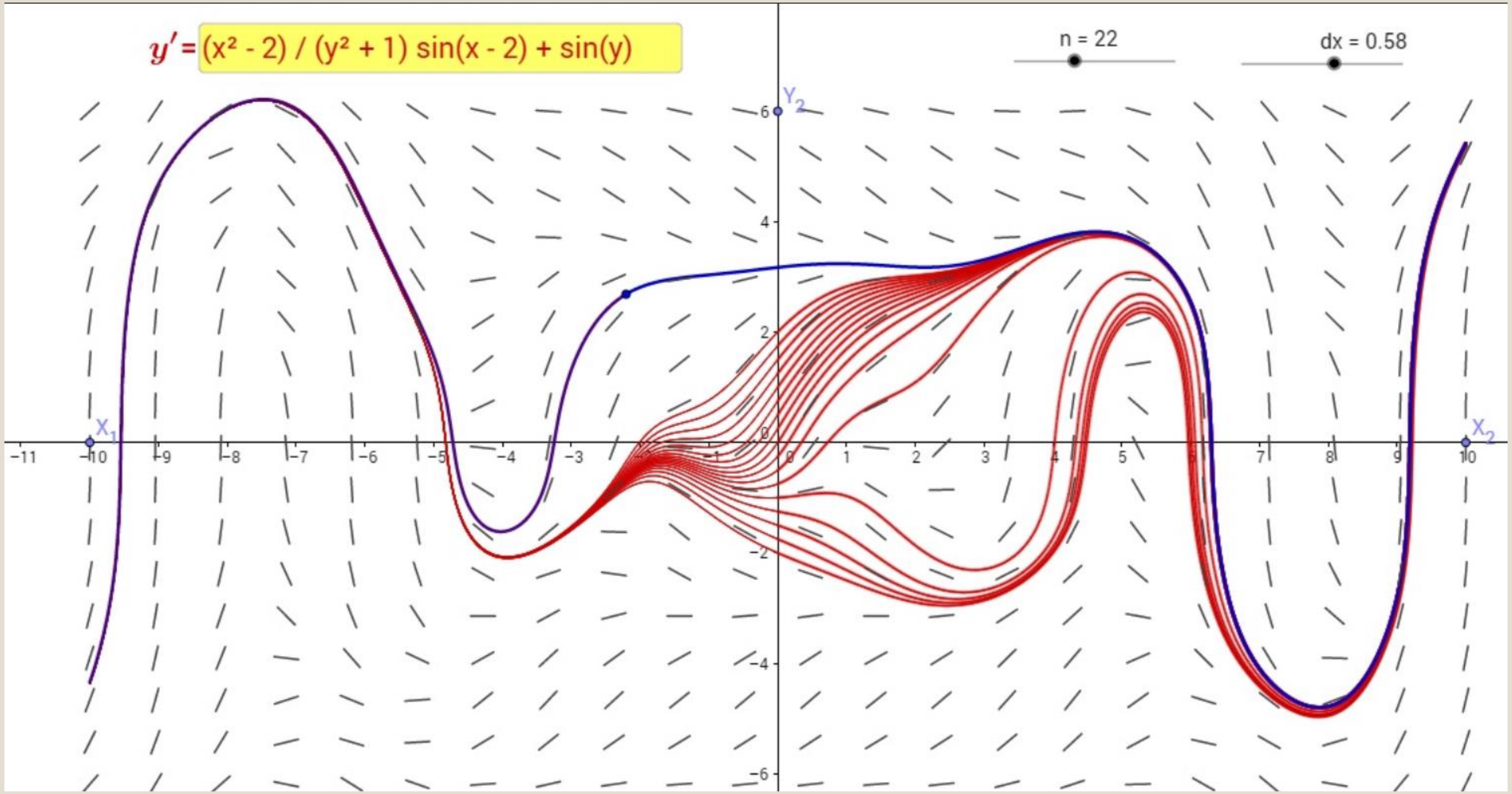
Unter der Annahme, dass dies nach $\dot{x}(t)$ umgeformt werden kann erhält man:

$$\dot{x}(t) = \mathrm{f}\big(\mathrm{t}, \mathrm{x}(\mathrm{t})\big)$$

Zeichnet man $\dot{x}(t)$ für verschiedene (t_0, x_0) auf, erhält man das Richtungsfeld der DGL

(Für die Allgemeine Lösung)

Beispiel Richtungsfeld



https://mathematikaktuellundkurios.wordpress.com/2016/06/09/differentialgleichung-und-richtungsfeld/

Existenzsatz

Satz (Existenzsatz). *Sei $f(x, y)$ stetig und nach y partiell stetig differenzierbar. Dann gibt es für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D(f)$ genau eine Funktion $y(x)$ mit*

$$y' = f(x, y) \qquad \textit{und} \qquad y(x_0) = y_0.$$

Jedes AWP hat eine eindeutige Lösung → $x(t) = 5 \cdot e^t$ ist die einzige Funktion, die die DGL $x(t) = \dot{x}(t)$ mit dem AWP $x(0) = 5$ löst.

Graphen von verschiedenen AWP's sind entweder identisch oder disjunkt (besitzen keine gemeinsamen Elemente)

Insbesondere schneiden sich die Graphen nicht – Die Kurvenscharen sind regulär

Reguläre Lösungsschaaren beschreiben Feldlinien von Vektorfeldern

SC Basisprüfung Winter 2020

24. (VII) Die Differentialgleichung $y' = f(x, y) := 3\sqrt[3]{y^2}$ besitzt die zwei verschiedenen Lösungskurven $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 0$, die durch den Punkt $(0, 0)$ laufen. Wie üblich sei $D(f)$ so gross wie möglich definiert. Warum ist dies *kein* Widerspruch zur Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen erster Ordnung?

(a) $(0, 0)$ liegt am Rand von $D(f)$.

(b) f ist nicht auf ganz $D(f)$ nach x stetig partiell differenzierbar.

(c) Für die zwei Lösungen y_1, y_2 kann $y_1(0) = y_2(0)$ gelten, solange $y_1'(0) \neq y_2'(0)$.

(d) f ist nicht auf ganz $D(f)$ nach y stetig partiell differenzierbar.

SC Basisprüfung Winter 2020

24. (VII) Die Differentialgleichung $y' = f(x,y) := 3\sqrt[3]{y^2}$ besitzt die zwei verschiedenen Lösungskurven $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 0$, die durch den Punkt $(0,0)$ laufen. Wie üblich sei $D(f)$ so gross wie möglich definiert. Warum ist dies *kein* Widerspruch zur Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen erster Ordnung?

(a) $(0,0)$ liegt am Rand von $D(f)$.

(b) f ist nicht auf ganz $D(f)$ nach x stetig partiell differenzierbar.

(c) Für die zwei Lösungen y_1, y_2 kann $y_1(0) = y_2(0)$ gelten, solange $y_1'(0) \neq y_2'(0)$.

(d) f ist nicht auf ganz $D(f)$ nach y stetig partiell differenzierbar.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot y^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{y^{\frac{1}{3}}} \rightarrow \text{in (0,0) nicht definiert}$$

Feldlinien eines Vektorfelds finden

Feldlinien

Feldlinien eines Vektorfeldes $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow y' = \frac{v_2}{v_1}$

Lösung der DGL ergeben die Feldlinien

Beispiel:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ y^2x + y^2 \end{pmatrix} \rightarrow wie\ lauten\ die\ Feldlinien\ dieses\ Vektorfelds?$$

Lösung

Laut der Formel setzen wir:

$$y' = \frac{y^2x + y^2}{y} \iff \mathrm{yx + y} \iff \mathrm{y(x+1)}$$

Wir separieren die Variablen: $y' \cdot \frac{1}{y} = x + 1$

Setze $\frac{1}{y(x)} \coloneqq h(y)$ & integriere auf beiden Seiten:

Wir erhalten die Gleichung: $\int h(y) \cdot y'\, dx \; = \int x + 1\, dx$

Wir können y' als $\frac{dy}{dx}$ schreiben $\Rightarrow \int h(y) \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx = \int x + 1\, dx$

Integration auf beiden Seiten liefert: $\int \frac{1}{y} dy = \int (x+1)\, dx \; \rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + x + C$

Umformen ergibt: $y = A \cdot e^{\frac{1}{2}x^2 + x} \;\; mit\ A = e^C$

Methode der Separation der Variablen

Bei einer separierbaren DGL können die Variablen getrennt werden.

$$h(y, y') = g(x)$$

Die Differentialgleichungen besitzen die Form $f(x, y) = \frac{g(x)}{h(y)} \rightarrow \text{DGL separierbar}$

Lösung einer separierbaren DGL $y' = \frac{g(x)}{h(y)}$: $\quad h(y) \cdot y' = g(x)$

Auf beiden Seiten nach x integrieren und y' als $\frac{dy}{dx}$ schreiben liefert: $\int h(y)\, dy = \int g(x)\, dx$

Diese Integrale lösen und Resultat nach y umformen.

Beispiel zum ausprobieren

Wie lautet die Lösung der separierbaren DGL $y' - \frac{x^2}{y} = 0$?

Beispiel zum ausprobieren

Wie lautet die Lösung der separierbaren DGL $y' - \frac{x^2}{y} = 0$?

Separation der Variablen: $y' \cdot y = x^2$

Integration: $\int y\,dy = \int x^2\,dx \rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}x^3 + C \rightarrow y = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot x^3 + B}, \quad \mathrm{B} = 2\mathrm{C}$

Diese Funktion kann auch wieder in die DGL eingesetzt werden um die Lösung zu überprüfen:

$$\frac{2x^2}{2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot x^3 + B}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot x^3 + B} = \mathrm{x}^2$$

MC Basisprüfung Sommer 2020

5. (VII) Welche der folgenden Aussagen über Differentialgleichungen erster Ordnung sind korrekt?

   (a) Die Gleichung $y' = \sin(x)(x^2y + \cosh(x)y + \sinh(x)) + e^x y$ ist linear.

   (b) Die Gleichung $y' = 2 + y - 2x^2 - x^2y$ ist separierbar.

   (c) Die Gleichung $(e^x + 2x^2y^3)(-y') = e^x y + xy^4$ ist exakt.

   (d) Die Gleichung $y' = 2y'x + \sin(y')$ ist eine Clairaut'sche Differentialgleichung.

MC Basisprüfung Sommer 2020

5. (VII) Welche der folgenden Aussagen über Differentialgleichungen erster Ordnung sind korrekt?

   (a) Die Gleichung $y' = \sin(x)(x^2y + \cosh(x)y + \sinh(x)) + e^x y$ ist linear.

   (b) Die Gleichung $y' = 2 + y - 2x^2 - x^2y$ ist separierbar.

   (c) Die Gleichung $(e^x + 2x^2y^3)(-y') = e^x y + xy^4$ ist exakt.

   (d) Die Gleichung $y' = 2y'x + \sin(y')$ ist eine Clairaut'sche Differentialgleichung.

a) Ist korrekt, da y(x) nur in der ersten Potenz vorkommt

b) Ist auch korrekt da: $y' = (2+y) - x^2(2+y) \Leftrightarrow \frac{y'}{2+y} = 1 - x^2$