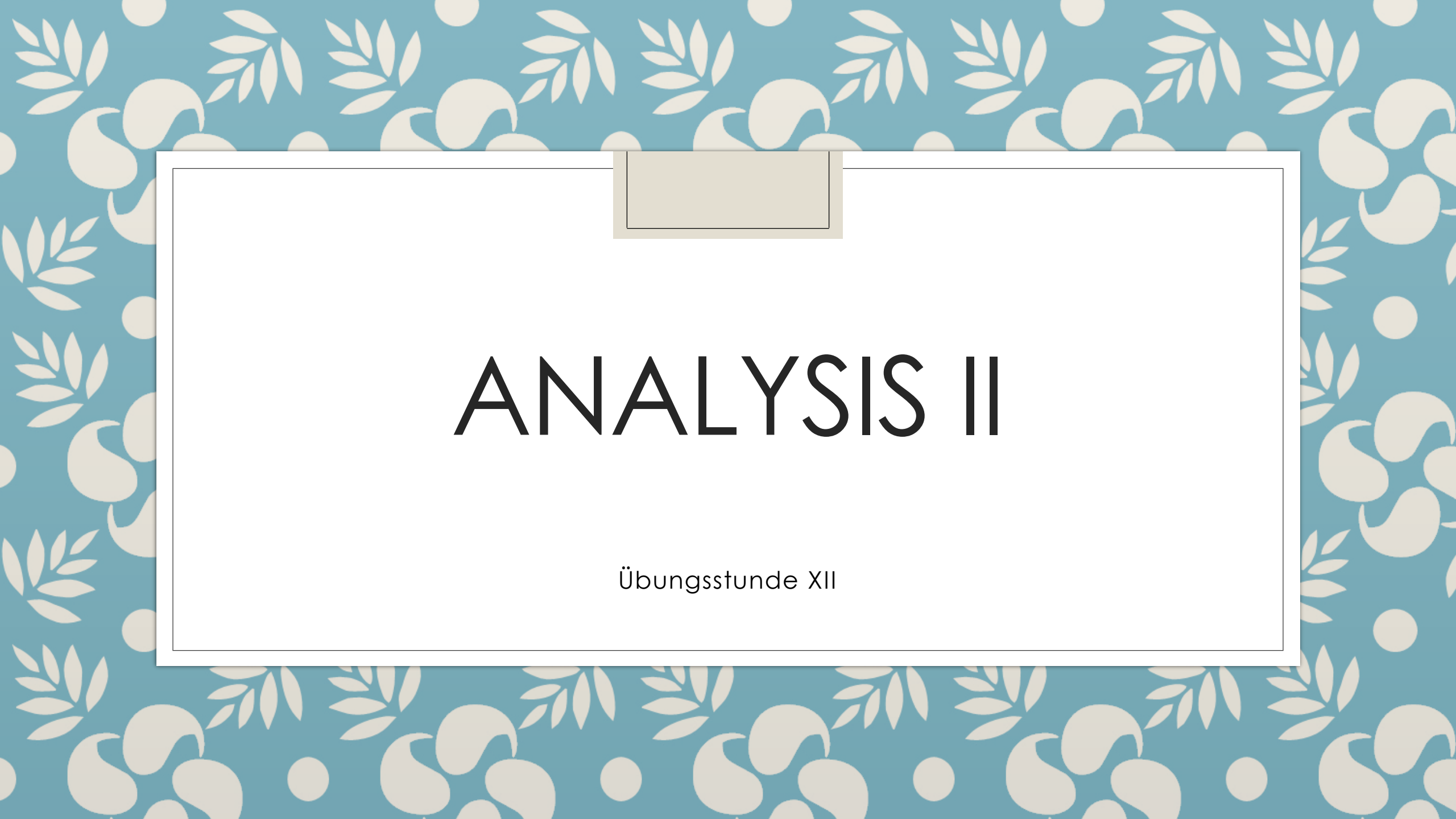




ANALYSIS II

Übungsstunde XII

- Nachbesprechung Serie 11
- Differentialgleichungen n-ter Ordnung
- Lineare DGL's 2. Ordnung
- Variation der Konstanten für DGL's zweiter Ordnung
- Homogene DGL's mit konstanten Koeffizienten
- Euler'sche DGL's

Ablauf

Nachbesprechung Serie 11

1. Finden Sie alle Kurven, gegeben durch $y = y(x)$, welche die folgende Bedingung erfüllen: Es sei t die Tangente im Punkt P der Kurve und Q ihr Schnittpunkt mit der y -Achse. Dann liegt der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ auf der Geraden, gegeben durch $y = x$.

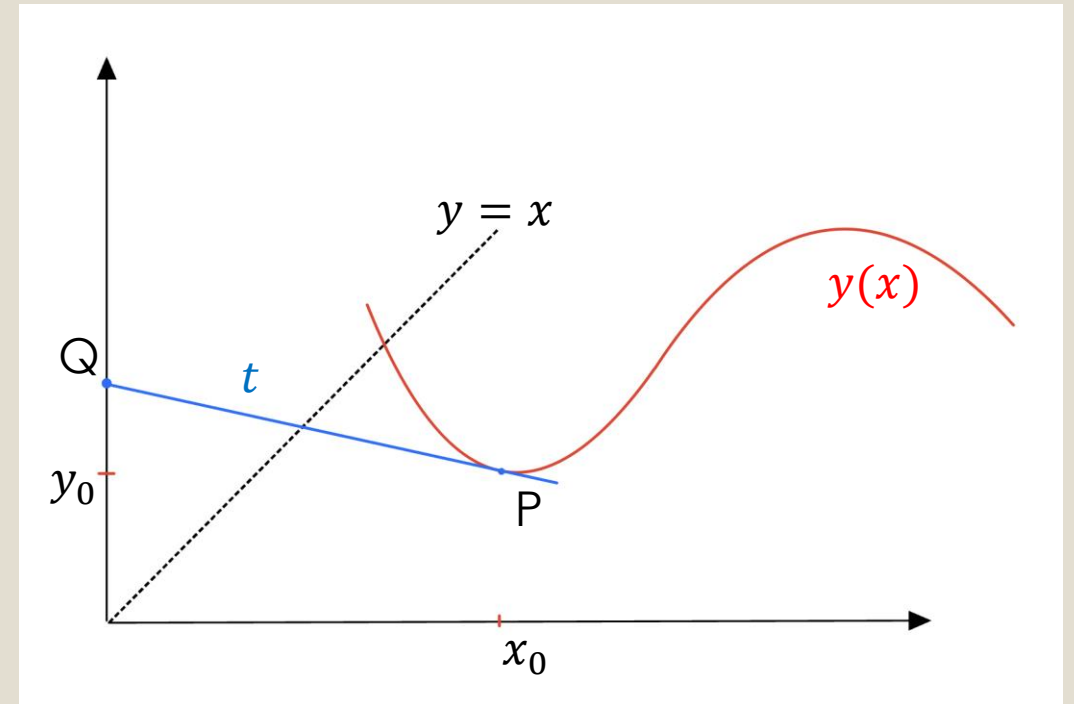
Nachbesprechung Serie 11

- Punkte: $Q = (0, q)$, $P = (x_0, y_0)$
- Tangentengleichung : $t(z) = y'(x_0)(z - x_0) + y(x_0)$
- Mittelpunkt → Superposition für x & y

$$m_x = \frac{Q_x + P_x}{2} = \frac{P_x}{2} = \frac{x_0}{2}$$

$$m_y = \frac{Q_y + P_y}{2} = \frac{q + y_0}{2}$$

$$\text{Mittelpunkt: } M = (m_x, m_y) = \left(\frac{x_0}{2}, \frac{q + y_0}{2} \right)$$



Nachbesprechung Serie 11

- Wie lautet eine Ausdruck für q ? → Die Tangente muss durch den Punkt $(0, q)$

$$\begin{aligned}\rightarrow t(0) &= y'(x_0)(0 - x_0) + y_0 = q \\ q &= -x_0 \cdot y'(x_0) + y_0\end{aligned}$$

Wir können dies nun in M ersetzen: $M = (m_x, m_y) = \left(\frac{x_0}{2}, \frac{q+y_0}{2}\right) = \left(\frac{x_0}{2}, \frac{-x_0 \cdot y'(x_0) + 2y_0}{2}\right)$

Der Mittelpunkt liegt auf der Winkelhalbierenden → Es gilt $m_x = m_y$

$$\frac{x_0}{2} = y_0 - \frac{1}{2}x_0 y'(x_0) \quad \rightarrow \quad y - \frac{x}{2}y' = \frac{x}{2} \quad \boxed{\text{Inhomogene lineare DGL 1. Ordnung}}$$

DGL's n-ter Ordnung

Es müssen nicht alle Ableitungen
zwingend vorkommen

Die höchste Ableitung definiert die Ordnung

$$3y''' - 2y'' - y' = 0 \rightarrow \text{DGL 3. Ordnung}$$

$$y(x) = C_1 + C_2 \cdot e^{3x} + C_3 \cdot e^{-x}$$

Die Allgemeine Lösung
besitzt n Scharparameter
(Hier $n = 3$)

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

$$y''(0) = 0$$

Die Spezielle Lösung kann mittels n AWP's gefunden werden
→ für jede Ableitung bis auf die letzte gibt es ein eigenes AWP

Verallgemeinerter Existenzsatz

Der Existenzsatz wird einfach auf die hinzukommenden Ableitungen erweitert:

Satz (Existenzsatz). *Wenn f stetig ist und nach $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ partiell stetig differenzierbar ist, dann hat die Differentialgleichung*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

zu vorgegebenen Anfangswerten

$$x_0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

eine eindeutige Lösung.

Prinzip ist analog, die Visualisierung mit dem Richtungsfeld und den Feldlinien funktioniert aber nicht mehr.

Bestimmung der DGL aus einer Lösungsfunktion

Bisher haben wir immer aus einer DGL die Lösungsfunktion berechnet

Wie findet aber man die DGL von einer Lösungsfunktion?

1. Man leitet die Lösungsfunktion so oft ab, wie Konstanten darin vorkommen.
→ Man erhält ein Gleichungssystem mit $n + 1$ Gleichungen
(n = Anzahl Konstanten $\hat{=}$ Ordnung der resultierenden DGL)
2. Man eliminiert alle Konstanten → Es bleibt die DGL n -ter Ordnung übrig

Übungsaufgabe

Wie lautet die DGL zur Kurvenschaar $y(x) = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{-3x}$?

Übungsaufgabe - Lösungen

Gegeben: Kurvenschar $y(x) = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{-3x}$ wie lautet die DGL dazu?

Beobachtung: Die Kurvenschar besitzt zwei Scharparameter und keine Terme ohne Konstanten → Es wird sich um eine homogene DGL 2. Ordnung handeln.

Man leitet zwei mal ab:

$$y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{-3x}$$

$$y' = -2C_1 \cdot e^{-2x} - 3C_2 \cdot e^{-3x}$$

$$y'' = 4C_1 \cdot e^{-2x} + 9C_2 \cdot e^{-3x}$$

Beispiel – DGL finden

Wir wissen, dass die resultierende Gleichung $= 0$ sein muss.

$$y = 1 \cdot C_1 \cdot e^{-2x} + 1 \cdot C_2 \cdot e^{-3x}$$

$$y' = -2C_1 \cdot e^{-2x} - 3C_2 \cdot e^{-3x}$$

$$y'' = 4C_1 \cdot e^{-2x} + 9C_2 \cdot e^{-3x}$$

Selbe Faktoren in allen Gleichungen $\rightarrow$ linearer Ansatz

$$A \cdot y + B \cdot y' + C \cdot y'' = 0$$

Man sucht also eine Linearkombination:

$$\begin{pmatrix} C_1 \cdot e^{-2x} \\ C_2 \cdot e^{-3x} \end{pmatrix}: \quad \begin{matrix} y & y' & y'' \\ A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & + B \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} & + C \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = 0 \end{matrix}$$

Eine Lösung findet man für $A = 6$, $B = 5$ und $C = 1 \rightarrow$ **DGL: $6y + 5y' + y'' = 0$**

Lineare DGL's höherer Ordnung

Definition. Eine **lineare Differentialgleichung höherer Ordnung** ist eine Gleichung der Form

$$(I) : \quad y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x) \cdot y'(x) + p_0(x) \cdot y(x) = q(x).$$

Definition. Die Gleichung (I) ist **inhomogen**, wenn das **Störglied** $q \not\equiv 0$ ist. Durch Setzen von $q \equiv 0$ in (I) erhält man die **homogene** Differentialgleichung (H).

Die allgemeine Lösung einer linearen DGL n-ter Ordnung ist eine Linearkombination von n linear unabhängigen Funktionen, die die homogene DGL Lösen + eine partikuläre Lösung

$$\mathbf{y}_I = \mathbf{y}_p + \mathbf{y}_H \quad \text{mit} \quad \mathbf{y}_H = y_{H1} + y_{H2} + \cdots + y_{Hn}$$

Variation der Konstanten 2. Ordnung

Die partikuläre Lösung der DGL kann über eine erweiterte Variante des Lagrange-Algorithmus bestimmt werden:

1. Homogene Lösung finden: $y(x) = C_1 \cdot u(x) + C_2 \cdot v(x)$

2. Konstanten C_1 & C_2 von x abhängig machen:

$$C_1(x) \cdot u(x) \text{ \& \> } C_2(x) \cdot v(x)$$

3. Folgende Annahmen werden getroffen:

$$C_1' u + C_2' v = 0$$

$$C_1' u' + C_2' v' = g(x) \text{ (Störglied)}$$

4. Die Ableitungen y' & y'' lauten dann:

$$y' = C_1 u' + C_2 v'$$

$$y'' = C_1' u' + C_1 u'' + C_2' v' + C_2 v''$$

5. Für C_1' & C_2' lösen:

$$C_1' = \frac{g(x) \cdot v}{u'v - uv'}$$

$$C_2' = -\frac{g(x) \cdot u}{u'v - uv'}$$

6. C_1 & C_2 durch Integration bestimmen und einsetzen

Aufgabe: Variation der Konstanten

Die DGL der Form $y'' - 3y' + 2y = e^x$ hat die Lösungen $y_1(x) = e^{2x}$ & $y_2(x) = e^x$

Die allgemeine homogene Lösung besitzt damit die Form $y(x) = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$

Wie lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ?

Lösung

Wir setzen $C_1, C_2 = C_1(x), C_2(x)$ & $u(x) = e^{2x}, v(x) = e^x$

Die folgenden Annahmen werden gemacht

$$C_1' u + C_2' v = 0$$

$$2C_1' e^{2x} + C_2' e^x = e^x$$

$$C_1' = \frac{g(x) \cdot v}{u'v - uv'} = \frac{e^{2x}}{2 \cdot e^{2x} e^x - e^{2x} \cdot e^x} = e^{-x}$$

$$C_2' = -\frac{g(x) \cdot u}{u'v - uv'} = -\frac{e^{3x}}{e^{3x} - 2e^{3x}} = -1$$

Lösung

Überprüfen ob $2C_1'e^{2x} + C_2'e^x = e^x$ gilt (**nicht freiwillig**):

$$2e^x - e^x = e^x \rightarrow \text{erfüllt}$$

$$C_1 = \int C_1' dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + A_1$$

$$C_2 = \int C_2' dx = \int -1 dx = -x + A_2$$

Die allgemeine Lösung lautet: $(-e^{-x} + A_1)e^{2x} + (-x + A_2)e^x$

Homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Einfacher Lösungsalgorithmus für Differentialgleichungen der Form:

$$C_1 \cdot y + C_2 \cdot y' + \dots + C_n \cdot y^{(n)} = 0, \quad C_i \in \mathbb{R}$$

Die Lösung kann über das charakteristische Polynom gefunden werden:

Die Ableitung von y wird dabei zur Potenz der Variablen im Charakteristischen Polynom (λ)

Beispiel: $6y + 5y' + y'' = 0 \rightarrow \text{char. poly.: } 6 + 5\lambda + \lambda^2 = 0 = (\lambda + 2)(\lambda + 3) \rightarrow \lambda_{1/2} = -2 / -3$

Die einzelnen Lösungen sind dann gegeben durch $C \cdot e^{\lambda x}$ und die allgemeine Lösung als eine Linearkombination davon:

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{-3x}$$

Spezialfälle

- Das Charakteristische Polynom besitzt n-fach reelle Nullstellen:

$$\mathbf{y}_1(x) = e^{\lambda x}, \quad \mathbf{y}_2(x) = x e^{\lambda x}, \quad \mathbf{y}_n(x) = x^{n-1} e^{\lambda x}$$

- Das Charakteristische Polynom besitzt konjugiert komplexe Nullstellen $\lambda = (a \pm ib)$:

$$\mathbf{y}(x) = e^{ax} \cos(bx) + e^{ax} \sin(bx)$$

- Das Charakteristische Polynom besitzt n-fach komplex konjugierte Nullstellen $\lambda = (a \pm ib)$:

$$\mathbf{y}_1 = e^{ax}(\cos(bx) + \sin(bx)), \quad \mathbf{y}_2 = x e^{ax}(\cos(bx) + \sin(bx)), \quad \mathbf{y}_n = x^{n-1} e^{ax}(\cos(bx) + \sin(bx))$$

Basisprüfung Sommer 2017

Offene Aufgabe.

- (a) Bestimmen Sie die Nullstellen und die Vielfachheiten der Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

[Hinweis: $1 - 6 + 11 - 6 = 0$.]

- ➡ (b) Es seien $2 \pm 3i$ und -1 die Nullstellen des charakteristischen Polynoms einer homogenen Differentialgleichung dritten Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten. Was ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?
- ➡ (c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - 7y' + 6y = e^{-x}.$$

Lösung BP Sommer 2017

b) Die Homogene Lösung ist eine Linearkombination der einzelnen Lösungen:

Für $\lambda = 2 \pm 3i$ wählen wir den Ansatz für komplex konjugierte Nullstellen: $\mathbf{y}(x) = C_1 \cdot e^{ax} \cos(bx) + C_2 \cdot e^{ax} \sin(bx)$

$$\rightarrow y_1(x) = e^{2x}(C_1 \cdot \cos(3x) + C_2 \cdot \sin(3x))$$

Für $\lambda = -1$ wählt man den normalen Ansatz $\mathbf{y}(x) = C \cdot e^{\lambda x} \rightarrow y_2(x) = C_2 \cdot e^{-x}$

Die Allgemeine Lösung lautet dann: $y(x) = y_1 + y_2 = e^{2x}(C_1 \cdot \cos(3x) + C_2 \cdot \sin(3x)) + C_2 \cdot e^{-x}$

Lösung BP Sommer 2017

b) Für den Störterm wählt man den Ansatz $A \cdot e^{-x}$

Ableiten & Einsetzen in die DGL ergibt:

$$\begin{aligned} -Ae^{-x} + 7Ae^{-x} + 6Ae^{-x} &= e^{-x} \\ 12Ae^{-x} &= e^{-x} \\ A &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Eine Partikuläre Lösung wäre demnach : $y_p(x) = \frac{1}{12} e^{-x}$

Euler'sche Differentialgleichung

Definition. Eine homogene lineare Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)}(x) + \frac{a_{n-1}}{x} \cdot y^{(n-1)}(x) + \frac{a_{n-2}}{x^2} \cdot y^{(n-2)} \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \cdot y'(x) + \frac{a_0}{x^n} \cdot y(x) = q(x)$$

ist eine **Euler'sche Differentialgleichung**. Für $q \equiv 0$ erhält man die **homogene Euler'sche Differentialgleichung**.

Diese DGL wird ähnlich wie die DGL mit konstanten Koeffizienten über ein **Index-Polynom** gelöst:

$$\text{Setze: } y = 1, \quad y' = \alpha, \quad y'' = \alpha \cdot (\alpha - 1), \quad y''' = \alpha \cdot (\alpha - 1)(\alpha - 2)$$

Die Lösung ist dann mit den Nullstellen des Indexpolynoms gegeben als

$$y = C \cdot x^\alpha$$

Spezialfälle

- Das Index-Polynom besitzt n-fach reelle Nullstellen:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = C_1 \cdot x^\alpha + C_2 \cdot \ln(x) \cdot x^\alpha + C_3 \cdot \ln^2(x) \cdot x^\alpha + \dots$$

- Das Index-Polynom besitzt konjugiert komplexe Nullstellen $\lambda = (a \pm ib)$:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = x^a (C_1 \cos(b \cdot \ln(x)) + C_2 \sin(b \cdot \ln(x)))$$

- Das Index-Polynom besitzt n-fach komplex konjugierte Nullstellen $\lambda = (a \pm ib)$:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = x^a (C_1 \cos(b \cdot \ln(x)) + C_2 \sin(b \cdot \ln(x))) + x^a \ln(x) (C_3 \cos(b \cdot \ln(x)) + C_4 \sin(b \cdot \ln(x))) + \dots$$

Beispielaufgabe

Wie lautet die Lösung der DGL: $y'' + \frac{1}{x} \cdot y' + 4 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot y = 0$?

Lösung

- Wir stellen das Indexpolynom auf:

$$\alpha(\alpha - 1) - \alpha + 4 = 0$$

$$\alpha^2 + 4 = 0$$

$$\alpha = \pm 2i$$

- → Formel für komplex konjugierte Nullstellen verwenden: $y(x) = x^a(C_1 \cos(b \cdot \ln(x)) + C_2 \sin(b \cdot \ln(x)))$

$$y(x) = C_1 \cos(2 \cdot \ln(x)) + C_2 \sin(2 \cdot \ln(x))$$