ANALYSIS II

Übungsstunde XI

Ablauf

- Nachbesprechung Serie 10
- Niveaulinien& Exakte DGL's
- Orthogonal Trajektorien
- Enveloppen & Singuläre Lösungen
- Clairaut'sche Differentialgleichungen
- Intuitionsübung

Nachbesprechung Serie 10

- Konstanten bitte nach jedem Rechenschritt, der die Konstante betrifft, umbenennen:

$$2y = x + A \to y = \frac{x}{2} + C \text{ oder } = \frac{\mathrm{x}}{2} + \frac{\mathrm{A}}{2} \text{ aber nicht} = \frac{\mathrm{x}}{2} + \mathrm{A}$$

- Das AWP muss im Definitionsbereich und Wertebereich der Lösungsfunktion liegen

$$y(x) = \pm\sqrt{f(x) + C}, \qquad y(-1) = -1$$

$\to$ Da die Wurzel positiv ist muss $\mathrm{y(x)} = -\sqrt{f(x) + C}$ gelten und $\mathrm{x} = -1$ im $\mathrm{D}\big(\mathrm{y(x)}\big)$ sein

Niveaulinien & Exakte Differentialgleichungen

Ziel: Die Niveaulinien einer Funktion in zwei Variablen als Lösungen einer DGL beschreiben

Die Niveaulinien einer Funktion g(x,y) können durch die Gleichung g(x,y) = C berechnet werden. Die DGL welche diese Niveaulinien beschreibt lautet:

$$g_y(x,y) \cdot y' + g_x(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)}$$

Beim Berechnen der Ableitung g_y wird y wie eine Variable behandelt → kein weiters y' entsteht (Das y' in der DGL ist bereits die innere Ableitung (siehe Herleitung in der VL))

Niveaulinien & Exakte Differentialgleichungen

Wie löst man diese DGL?

Wenn die Lösung der DGL wirklich die Niveaulinien einer Funktion sind, handelt es sich um eine exakte DGL für diese die Bedingung $\left(g_y\right)_x = (g_x)_y$ gelten muss.

Ist dies erfüllt, so lässt sich g(x,y) analog zu einem Potential durch Integration und anschliessendem Koeffizientenvergleich bestimmen.

Man bestimmt das Potential des zugehörigen Vektorfelds $\vec{\mathrm{v}} = grad(g)$

Basisprüfung Sommer 2017 – Offene Aufgabe

Offene Aufgabe. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x\,(e^y - 3x)\,y' - 6xy + e^y + 1 = 0.$$

Es genügt, die Lösung implizit anzugeben.

Lösung offene Aufgabe

Die DGL besitzt die Form einer Exakten Differentialgleichung.

Man prüft deshalb ob $\left(g_y\right)_x = (g_x)_y$ gilt.

$$e^y - 3x - 3x = -6x + \mathrm{e}^{\mathrm{y}} \rightarrow \text{erfüllt}$$

Um g(x,y) zu finden integrieren wir g_y nach y und g_x nach x:

$$\left.\begin{array}{l} \int x(e^y - 3x)\,dy = xe^y - 3x^2y + C(x) \\ \\ \int -6xy + e^y + 1\,dx = -3\mathrm{x}^2\mathrm{y} + \mathrm{xe}^{\mathrm{y}} + \mathrm{x} + \mathrm{C(y)} \end{array}\right\} \quad g(x,y) = C \iff xe^y - 3x^2y + x = C$$

Orthogonal Trajektorien

Ziel: Eine Kurvenschar finden, die überall senkrecht auf den Niveaulinien einer Funktion f(x,y) steht.

$\Leftrightarrow$

Die Feldlinien eines Gradientenfelds $\vec{v} = grad(f)$ bestimmen

Reminder: Der Gradient einer Funktion steht senkrecht auf der Funktion selbst

→ Die Feldlinien des Gradientenfelds stehen senkrecht

auf den Niveaulinien des Potentials

Orthogonal Trajektorien ausgehend von den Niveaulinien eines Potentials berechnen

Wie wir gesehen haben sind die Niveaulinien einer Kurvenschar der Form g(x,y(x)) = C

Um die Orthogonal Trajektorien dieser Kurvenschar zu bestimmen benötigen wir die DGL, welche die Niveaulinien beschreibt.

Dafür leiten wir die Gleichung auf beiden Seiten nach x ab $(C \ \rightarrow 0)$ & formen nach y' um

Anschliessend ersetzt man y' durch $-\frac{1}{y'_{OT}}$ und y durch y_{OT}

Das ist wie wenn man die Normale zu einer Geraden berechnet

Nun löst man die neue DGL für y_{OT}

Orthogonal Trajektorien (Variante 2)

Eine zweiten Variante die Orthogonal Trajektorien einer Funktion f(x,y) zu berechnen:

Man bestimmt das Vektorfeld $\vec{v} = grad(f) \rightarrow$ die Feldvektoren von $\vec{v}$ stehen bereits senkrecht auf den Niveaulinien des Potentials

Daher muss man noch die Feldlinien des Vektorfelds $\vec{v}$ berechnen.

D.h. man löst die DGL:

$$y' = \frac{v_2}{v_1}$$

Basisprüfung Sommer 2018

3. Sei $f(x,y) = \sin(x) \cdot (1 - y^2)$.

   (a) Betrachten Sie den Graphen

   $$\Gamma(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

   Im Bereich $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 9\}$ gibt es mehrere Punkte, in denen die Tangentialebene an den Graphen $\Gamma(f)$ horizontal liegt, dh. parallel zur xy-Ebene. Bestimmen Sie für alle diese Punkte jeweils den Abstand der Tangentialebene zur xy-Ebene.

   (b) Bestimmen Sie die (implizite) Gleichung derjenigen Kurve durch $P = (0, 1/\sqrt{e})$, die überall senkrecht auf den Niveaulinien von f steht, wobei e die Eulersche Zahl ist. (*Hinweis:* Orthogonaltrajektorien!)

Lösung: $$\frac{1}{2}\ln|y| - \frac{y^2}{4} = \ln|\cos(x)| - \frac{1}{4} - \frac{1}{4e}$$

Lösung BP Sommer 2018

Variante 1:

Man setzt $\sin(x) \cdot (1 - y^2) = C$ und leitet nach x ab:

$$\cos(x) \cdot (1 - y^2) + \sin(x) \cdot (-2y) \cdot y' = 0$$

Man löst nach y' und ersetzt $y = y_{OT}$ sowie $y' = \frac{1}{y'_{OT}}$

$$y' = \frac{\cos(x)\,(1 - y^2)}{\sin(x) \cdot 2y} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{y'_{OT}} = \frac{\cos(x)\,(1 - y_{OT}^2)}{\sin(x) \cdot 2y_{OT}}$$

Die DGL lautet also:

$$\frac{y'_{OT} \cdot (1 - y_{OT}^2)}{2y_{OT}} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -tan(x)$$

Lösung BP Sommer 2018

Variante 2:

Wir berechnen das Gradientenfeld des Potentials:

$$grad(f) = \begin{pmatrix} \cos(x) \cdot (1 - y^2) \\ \sin(x) \cdot (-2y) \end{pmatrix}$$

Die DGL für die Feldlinien des Gradientenfelds lautet:

$$y' = \frac{v_2}{v_1} = \frac{-2\mathrm{y}\sin(x)}{\cos(x) \cdot (1 - y^2)} \Leftrightarrow \frac{y'(1 - y^2)}{2y} = -\tan(x)$$

Lösung BP Sommer 2018

Die DGL kann durch die Separation der Variablen gelöst werden:

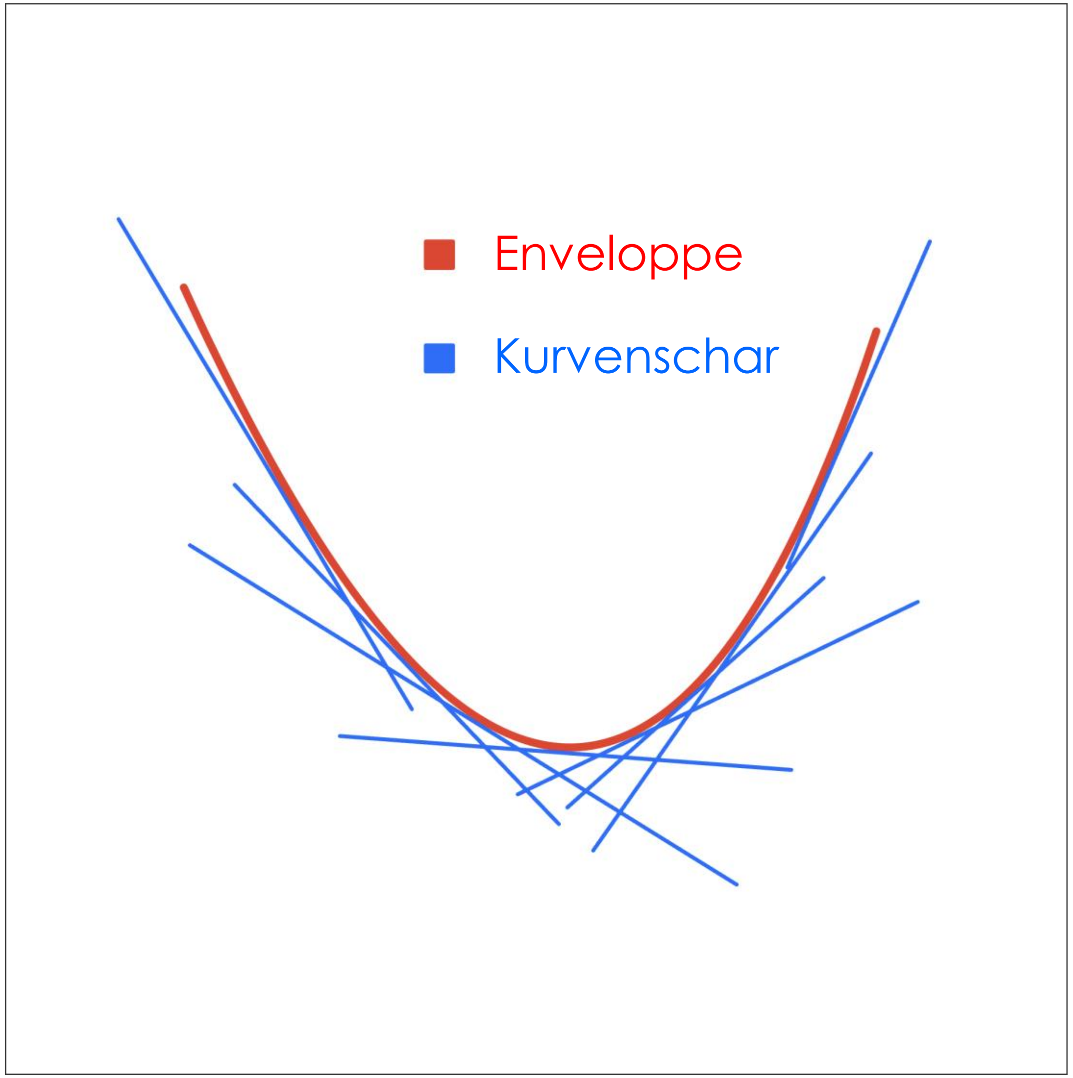
$$\frac{y'(1-y^2)}{2y} = -\tan(x) \rightarrow \int \frac{1}{2y} - \frac{y}{2}\, dy = -\int \tan(x)\, dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|y| - \frac{y^2}{4} = \ln|\cos(x)| + C$$

AWP $y(0) = \frac{1}{\sqrt{e}}$:

$$\frac{1}{2}\overbrace{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)}^{= \ln(1) - \ln(\sqrt{e}) = -\frac{1}{2}\ln(e) = -\frac{1}{2}} - \frac{1}{4e} = 0 + C \rightarrow C = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4e}$$

Lösung: $$\frac{1}{2}\ln|y| - \frac{y^2}{4} = \ln|\cos(x)| - \frac{1}{4} - \frac{1}{4e}$$



Enveloppe & Singuläre Lösung

Idee:

Aus einer Kurvenschar diejenige Kurve konstruieren, die in jedem Punkt tangential zur Kurvenschar ist.

Enveloppe & Singuläre Lösung

Ist die Kurvenschar gegeben durch $y' = f(x, y)$, dann ist die Enveloppe auch eine Lösung dieser Kurvenschaar – nämlich **die singuläre Lösung**

Dadurch das sich die Enveloppe und die Lösungskurven der Kurvenschar in einem Punkt berühren und beide Kurven Lösungen derselben DGL sind, kann der Existenzsatz für solche DGL's nicht gelten.

→ Enveloppen existieren i. d. R. nur für nicht reguläre Kurvenscharen

Bestimmen der Enveloppe

Vorgehen: Ausgehend von einer Kurvenschar F(x,y,c) = 0

Man löst das Gleichungssystem $\left| \begin{matrix} F(x,y,c) = 0 \\ F_C(x,y,c) = 0 \end{matrix} \right|$, wobei man C eliminiert.

Standardisiertes Vorgehen:

1. Gleichung F(x,y,c) nach dem Scharparameter ableiten

2. Nach dem Scharparameter auflösen $C = h(x,y)$

3. Lösung für den Scharparameter in ursprüngliche Gleichung einsetzen & Vereinfachen

Basisprüfung Sommer 2018

5. Eine Schar von Kurven K_C sei gegeben durch

$$(x - C)^2 + y^2 = C, \quad C \geq 0.$$

(a) Bestimmen Sie die Enveloppe dieser Kurvenschar.

Lösung Basisprüfung Sommer 2018

Wir bringen die Kurvenschar in die Form f(x,y,c) = 0: $(x - C)^2 + y^2 - C = 0$

Man leitet nach C ab: $-2(x - C) - 1 = 0$

Auflösen nach C: $C = \frac{1+2x}{2}$

Einsetzen in die Ursprüngliche Gleichung: $\left(x - \frac{1+2x}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1+2x}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} - x\right)^2 + y^2 - \frac{1}{2} - x = 0 \Leftrightarrow x = y^2 - \frac{1}{4}$$

Basisprüfung Sommer 2019

Aufgabe 7

a) Stellen Sie die Schargleichung folgender 1-parametriger Kurvenschar auf und bestimmen Sie die zugehörige Enveloppe E:

Die Kurve zum Parameter $C > 0$ ist eine Ellipse mit Zentrum $(C, 0)$ und achsenparallelen Halbachsen der Länge 1 in x-Richtung und $1/C$ in y-Richtung.

Tipp: Implizite Ellipsengleichung verwenden

Lösung BP Sommer 2019

Wir stellen für die beschriebene Ellipse die implizite Ellipsengleichung auf:

$$\frac{(x-C)^2}{1^2}+\frac{\mathrm{y}^2}{\frac{1}{C^2}}=1 \quad \Leftrightarrow \quad (x-C)^2+C^2y^2=1$$

Wir setzen $F(x,y,c)=(x-C)^2+(Cy)^2-1=0$

Man leitet dies nach C ab: $\frac{dF}{dC}=-2(x-C)+2Cy^2=0$

Nach C umformen: $2C(y^2+1)=2x \;\rightarrow C=\frac{x}{y^2+1}$

In die ursprüngliche Gleichung einsetzen: $\left(x-\frac{x}{y^2+1}\right)^2+\left(\frac{yx}{y^2+1}\right)^2-1=0$

Umformen … $x^2y^2=1+y^2$

Clairaut’sche Differentialgleichungen

<u>Spezialfall einer Enveloppen:</u>

Gleichungen der Form $\mathrm{y} = y' \cdot x + g(y')$ heissen Clairaut’sche DGL’s und besitzen die

Allgemeine Lösung $\mathrm{y(x)} = C \cdot x + g(C)$ → Man ersetzt y’ durch C und wendet

anschliessend das gleiche Verfahren wie bei der Enveloppe an, um die singulär Lösung

der Kurvenschar zu finden

Die Lösungen von Clairaut’schen DGL’s sind immer Geraden und die Enveloppe dazu

MC Basisprüfung Sommer 2018

9. (Typen von DGL 1. Ordnung MC) Welche der folgenden Aussagen über Differentialgleichungen erster Ordnung sind korrekt?

   (a) Die Gleichung $y' = 1 - x - y + xy$ ist separierbar.

   (b) Die Gleichung $y' = \sin(x)(x^3 + (2x^2 + 1)y)$ ist linear und homogen.

   (c) Die Gleichung $(e^x + 3x^2y^2)y' = e^xy + xy^3$ ist exakt.

   (d) Die Gleichung $y = xy' - y'^3$ ist eine Clairaut'sche Differentialgleichung.

MC Basisprüfung Sommer 2018

9. (Typen von DGL 1. Ordnung MC) Welche der folgenden Aussagen über Differentialgleichungen erster Ordnung sind korrekt?

   (a) Die Gleichung $y' = 1 - x - y + xy$ ist separierbar.

   (b) Die Gleichung $y' = \sin(x)(x^3 + (2x^2 + 1)y)$ ist linear und homogen.

   (c) Die Gleichung $(e^x + 3x^2y^2)y' = e^x y + xy^3$ ist exakt.

   (d) Die Gleichung $y = xy' - y'^3$ ist eine Clairaut'sche Differentialgleichung.

Für c) prüft man die IB's: $e^x + 6xy^2 \neq e^x + 3xy^2$ → Die DGL ist nicht exakt

d) Ist korrekt, da sie die Form y $= y' \cdot x + g(y')$ erfüllt. Die Lösung der DGL wäre

$$y(x) = Cx + C^3$$

Intuitionsübung

Wir haben in der Vorlesung schon eine ganze Reihe von Begriffen für Differentialgleichungen erster Ordnung kennengelernt. Bei diesem Haufen Definitionen, Lösungsmöglichkeiten und Zusammenhänge kann man leicht den Überblick verlieren. Zeit, etwas Ordnung zu schaffen!

In dieser Übung werden Sie wahrscheinlich öfter im Skript oder in den Vorlesungsnotizen nachschauen - Es lohnt sich, diese Dinge griffbereit zu haben. Wir wollen hier klassifizierende Sätze bauen, etwa wie folgt:

> "Eine beliebige **Differentialgleichung erster Ordnung** hat die Form $y' = f(x, y)$.
>
> Die **allgemeine Lösung** davon ist die Menge aller Lösungen. Diese Menge beschreibt eine **Kurvenschar**. Wenn der Existenzsatz erfüllt ist, ist die Kurvenschar **regulär**, und zu jedem Anfangswert im Definitionsbereich gibt es eine eindeutige **spezielle Lösung**."

Wir wollen also eine Definition, eine Beschreibung der Lösung, falls möglich ein Lösungsverfahren und etwas über die zugehörige Kurvenschar sagen.

Nehmen Sie sich 4 Minuten Zeit für folgende Aufgabe:

- Wählen Sie einen der folgenden Begriffe, den Sie noch nicht so gut beherrschen: **Lineare Differentialgleichung**, **exakte Differentialgleichung**, **Niveaulinien**, **Feldlinien**, **Orthogonaltrajektorien**, **Enveloppe**, **Clairaut'sche Differentialgleichung**.
- Geben Sie eine Definition und eine passende, allgemeine Form der Differentialgleichung an.
- Beschreiben Sie den Begriff mithilfe der folgenden Wörter:
  - die auftretenden Arten von Lösungen: **allgemein**, **speziell**, **homogen**, **partikulär, singulär**;
  - die Kurvenschar: **regulär**, **nicht-regulär**;
  - die benötigten/hilfreichen Lösungsverfahren: **separierbar**, **Substitution**, **geschickter Ansatz**, **Variation der Konstanten**.
- Schauen Sie ggf. im Skript oder in den Vorlesungsnotizen nach, was wir dazu alles gemacht haben!

Intuitionsübung

Nehmen Sie sich **3 Minuten Zeit** für folgene Aufgabe:

Zur Erinnerung, der erste Teil der Aufgabe lautete:

- Wählen Sie einen der folgenden Begriffe, den Sie noch nicht so gut beherrschen: **Lineare Differentialgleichung**, **exakte Differentialgleichung**, **Niveaulinien**, **Feldlinien**, **Orthogonaltrajektorien**, **Env eloppe**, **Clairaut'sche Differentialgleichung**.
- Geben Sie eine Definition und eine passende, allgemeine Form der Differentialgleichung an.
- Beschreiben Sie den Begriff mithilfe der folgenden Wörter:
  - die auftretenden Arten von Lösungen: **allgemein**, **speziell**, **homogen**, **partikulär**, **singulär**;
  - die Kurvenschar: **regulär**, **nicht-regulär**;
  - die benötigten/hilfreichen Lösungsverfahren: **separierbar**, **Substitution**, **geschickter Ansatz**, **Variation der Konstanten**.
- Schauen Sie ggf. im Skript oder in den Vorlesungsnotizen nach, was wir dazu alles gemacht haben!

Lineare Differentialgleichung

Eine **Lineare DGL** besitzt die Form: $\boxed{y' = p(x) \cdot y + q(x),}$ p & q sind immer Funktionen in x

q(x) wird auch **Störglied / inhomogener Teil** genannt und ist (wenn vorhanden) für die Inhomogenität der DGL verantwortlich

Lösungsverfahren: Die Lösung der inhomogenen DGL ist durch die allgemeine **homogene Lösung** sowie einer **partikulären Lösung** gegeben

$$\boxed{y_I = y_h + h_p}$$

Die Homogene DGL kann über die **Separation der Variablen** gelöst werden, die partikuläre Lösung über einen **geschickten Ansatz** oder die **Variation der Konstanten**

Die DGL erfüllt den Existenzsatz, wenn p & q stetig sind. In diesem Fall ist die Kurvenschar der allgemeinen Lösung **regulär**

Exakte Differentialgleichung

Generelle Form: $\boxed{\varphi + \psi \cdot y = 0 \;\widehat{=}\; g_x(x,y) + g_y(x.y) \cdot y = 0,}$ wobei φ & ψ die **Integrabilitätsbedingungen** $\varphi_y \equiv \psi_x$ (auf einem Achsenparallelen Rechteck) erfüllen.

Lösungsvorgehen: Man prüft die IB's und wenn diese erfüllt sind, ist die Lösung identisch zum **Potential** des dazugehörigen **Vektorfelds** $\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{g_x} \\ \boldsymbol{g_y} \end{pmatrix}$ → einzeln **Integrieren** & **Koeffizientenvergleich**

Die Implizite allgemeine Lösung lautet **F = 0** (mit F = Potential)

Niveaulinien

Eine Gleichung **F(x,y) = C** definiert eine **Kurvenschar als Niveaulinien von F zum Niveau C**

Wird y = y(x) gesetzt und die Gleichung nach x abgeleitet und umgeformt erhält man die generelle Form der DGL:

$$\boxed{y' = -\frac{F_x}{F_y}}$$

Diese DGL kann manchmal über die **Separation der Variablen** oder eine **Substitution** gelöst werden.

Die Lösungsschar ist genau dann **regulär**, wenn $-\frac{F_x}{F_y}$ den Existenzsatz erfüllt

Feldlinien

Wenn $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ ein **planares Vektorfeld** ist, dann sind seine Feldlinien gegeben durch die Kurvenschar mit der allgemeinen DGL

$$\boxed{y' = \frac{v_2}{v_1}}$$

Diese DGL kann manchmal über die **Separation der Variablen** oder eine **Substitution** gelöst werden.

Die Lösungsschar ist genau dann **regulär**, wenn $\frac{v_2}{v_1}$ den Existenzsatz erfüllt.

Wenn das Vektorfeld ein **Gradientenfeld** ist, stehen **Feldlinien senkrecht auf den Niveaulinien** des Potentials

Orthogonal Trajektorien

Wenn eine Kurvenschar als $y' = f(x, y)$ gegeben ist, dann sind die Orthogonal Trajektorien durch die DGL $\boxed{y' = -\frac{1}{f(x,y)}}$ gegeben und stehen überall **senkrecht auf den Niveaulinien von** $\boldsymbol{f(x, y)}$

Die Orthogonal Trajektorien sind die **Feldlinien des Gradientenfelds** von $f(x, y)$

Die DGL kann manchmal über die **Separation der Variablen** oder eine **Substitution** gelöst werden.

Die Lösungsschar ist genau dann **regulär**, wenn $-\frac{1}{f(x,y)}$ den Existenzsatz erfüllt.

Enveloppe / Hüllkurve

Die Enveloppe einer **nicht-regulären Kurvenschar** $\boxed{F(x, y, c) = 0}$ ist die **singuläre Lösung** derselben schar und kann durch das Lösen der Gleichung $\boxed{F_C(x, y, c) = 0}$ für C und das anschliessende **eliminieren von C** in $F(x, y, c) = 0$ gefunden werden.

Die Enveloppe ist **in jedem Punkt tangential zur Kurvenschar**

Eine Kurvenschar mit Enveloppe **erfüllt den Existenzsatz nicht**.

Clairaut'sche DGL

Die Allgemeine Form lautet $\boxed{y = y' \cdot x + g(y')}$ für irgendeine Funktion g

Die Lösungen sind **Geraden und die dazugehörige Enveloppe**

Lösungsansatz: $\boxed{\text{y' durch C ersetzen}}$ und gegebenenfalls die **singuläre Lösung** analog zum Vorgehen bei der Enveloppe finden (C eliminieren).

Die Clairaut'sche DGL ist ein **Spezialfall der Enveloppe** und die dazugehörigen Kurvenscharen sind **nicht regulär**