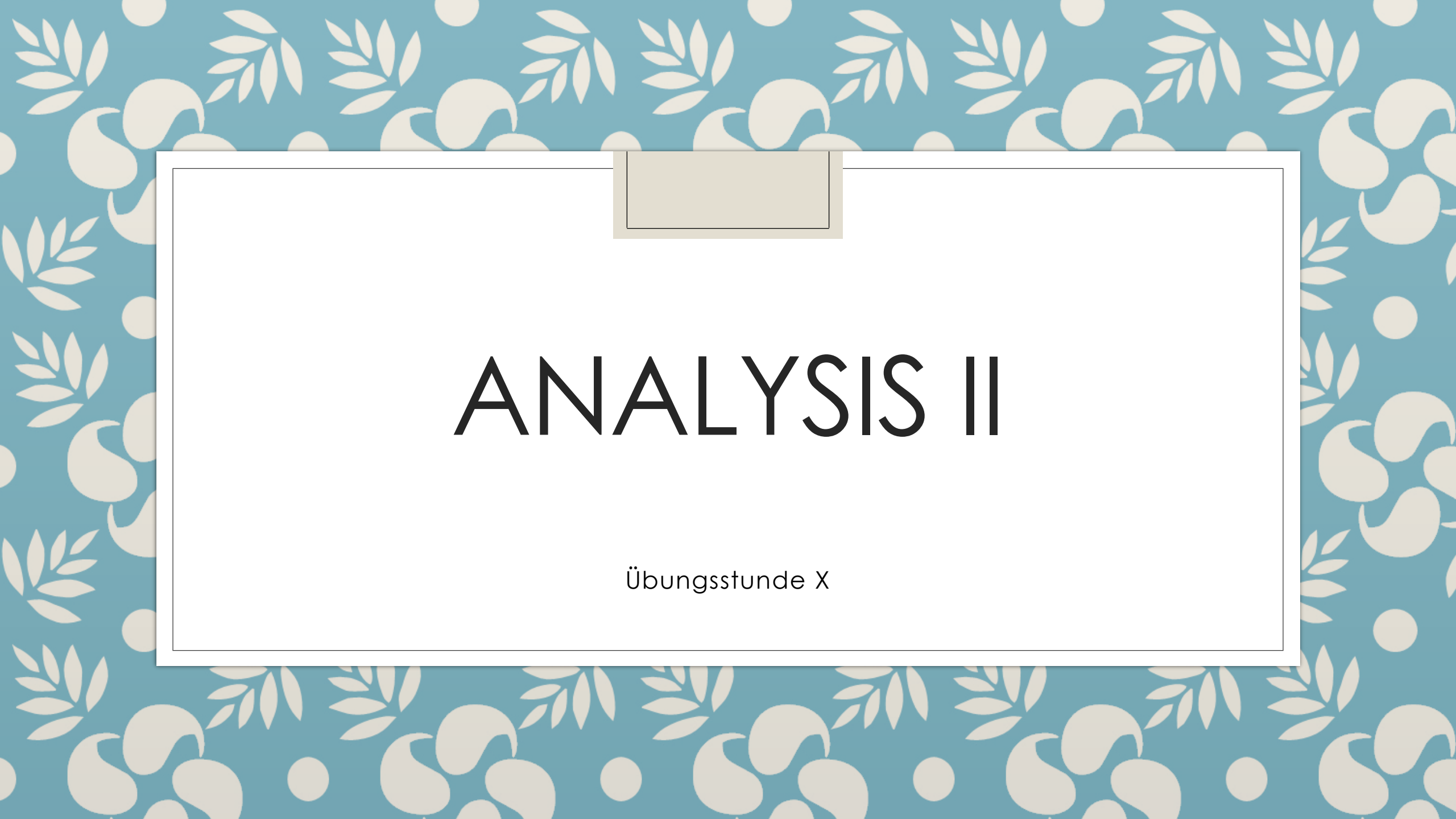




ANALYSIS II

Übungsstunde X

- Intuationsübung (letzte Woche)
- Nachbesprechung Serie 9
- DGL's mit Substitution
- Lineare DGL's
- Homogene & Partikuläre Lösung
- Lagrange Algorithmus

Ablauf

Intutionsübung

Wir haben in der Vorlesung einige Zusammenhänge zwischen Vektorfelder, Potentialen und Arbeitsintegralen gesehen:

- Satz: Ein Vektorfeld ist genau dann konservativ, wenn die Arbeit entlang aller geschlossenen Wege 0 ist;
- Satz: Ein Vektorfeld ist genau dann konservativ, wenn es ein Potentialfeld ist.

In dieser Übung wollen wir ein Vektorfeld mit speziellen Eigenschaften betrachten und anschauen, wie das in die allgemeine Theorie passt.

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D(\vec{v}) = \{(x, y, z) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

- Dieses Vektorfeld ist also ausserhalb der z -Achse überall definiert.
- Es ist **wirbelfrei**: $\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{0}$.
- Das Vektorfeld **zeigt ausserdem überall direkt zur z -Achse** hin, jeweils parallel zur xy -Ebene.
- Das **Arbeitsintegral entlang eines Kreises** mit Mittelpunkt in der z -Achse, der ausserdem parallel zur xy -Ebene liegt, ist **immer 0**: Das Vektorfeld $\vec{v}$ steht dann senkrecht auf dem Tangentialvektor $\dot{\vec{r}}$, also ist $\vec{v} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$.

Wir wollen zeigen, dass das Vektorfeld tatsächlich konservativ ist. Dazu müssen wir zeigen, dass alle Arbeitsintegrale entlang geschlossener Wege 0 sind, nicht nur für die achsenparallelen Kreise.

Nehmen Sie sich **3 Minuten Zeit** für folgende Aufgabe:

- Wählen Sie einen beliebigen geschlossenen Weg in $D(\vec{v})$.
- Entscheiden Sie, ob Ihr Weg um die z -Achse herumführt oder nicht.
- Begründen Sie, weshalb das Arbeitsintegral auch für Ihren Weg 0 ergibt.

Intutionsübung

Zur Erinnerung: Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D(\vec{v}) = \{(x, y, z) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

- Dieses Vektorfeld ist also ausserhalb der z -Achse überall definiert.
- Es ist **wirbelfrei**: $\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{0}$.
- Das Vektorfeld **zeigt ausserdem überall direkt zur z -Achse** hin, jeweils parallel zur xy -Ebene.
- Das **Arbeitsintegral entlang eines Kreises** mit Mittelpunkt in der z -Achse, der ausserdem parallel zur xy -Ebene liegt, ist **immer 0**: Das Vektorfeld $\vec{v}$ steht dann senkrecht auf dem Tangentialvektor $\dot{\vec{r}}$, also ist $\vec{v} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$.

Auftrag:

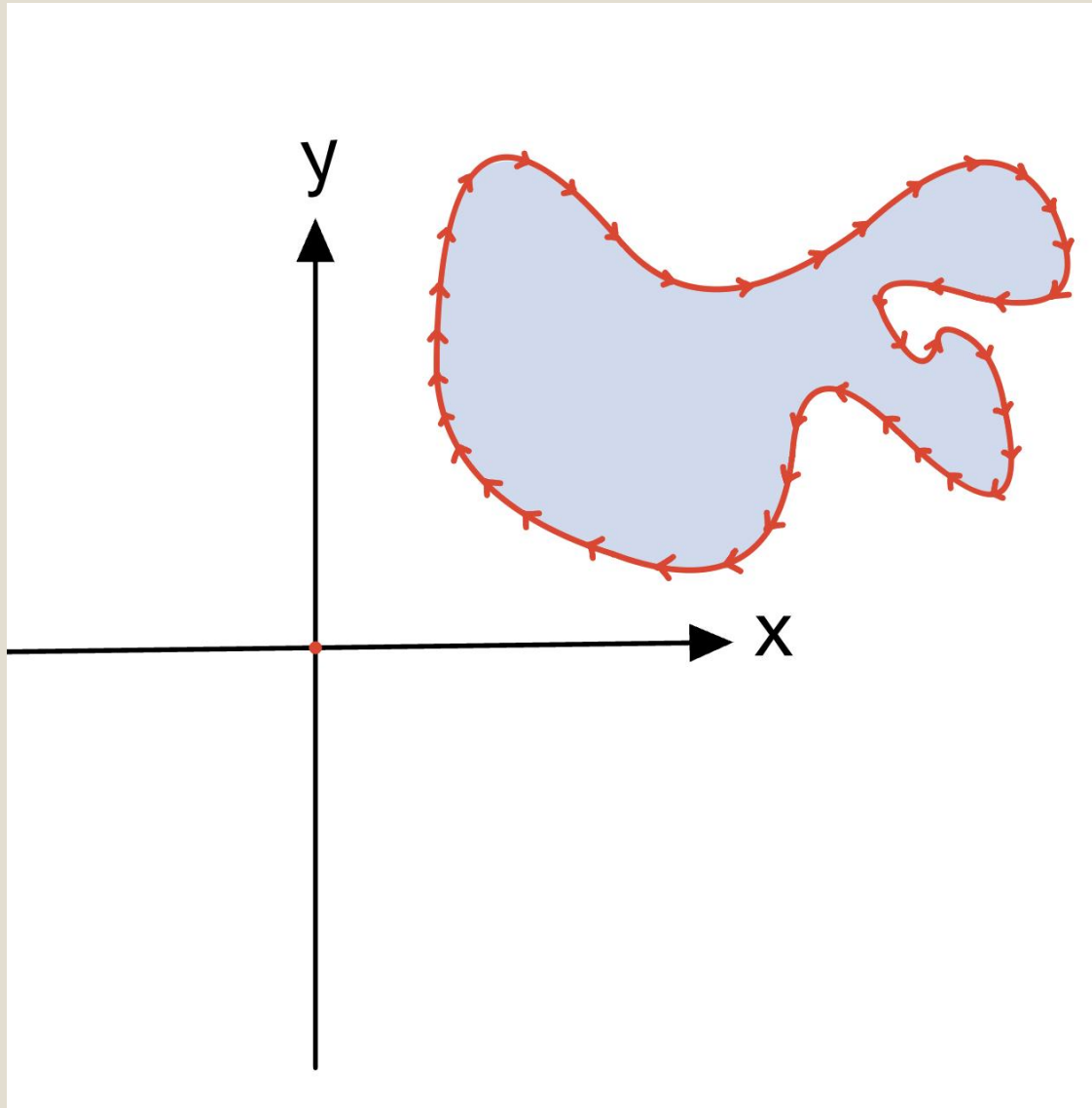
- Tun Sie sich nun mit jemandem zusammen und erklären Sie der zweiten Person, weshalb das Arbeitsintegral bei Ihnen 0 ergeben muss.
- Betrachten Sie die verwendeten Argumente: Gibt es unterschiedliche Begründungen, je nachdem ob der Weg um die z -Achse herumführt oder nicht? Weshalb?
- Falls Sie beide die gleiche Art Weg gewählt (um z -Achse, oder nicht) haben, untersuchen Sie die andere Art und begründen möglichst effizient, warum das Wegintegral dort auch 0 ergibt.

Nehmen Sie sich **4 Minuten Zeit** für diese Aufgaben.

Variante 1

- Die Arbeit entlang eines Wegs, der in einem einfach-zusammenhängenden Teil des Vektorfelds verläuft ist immer Null, da $\text{rot}(\vec{v}) = 0$ gilt.

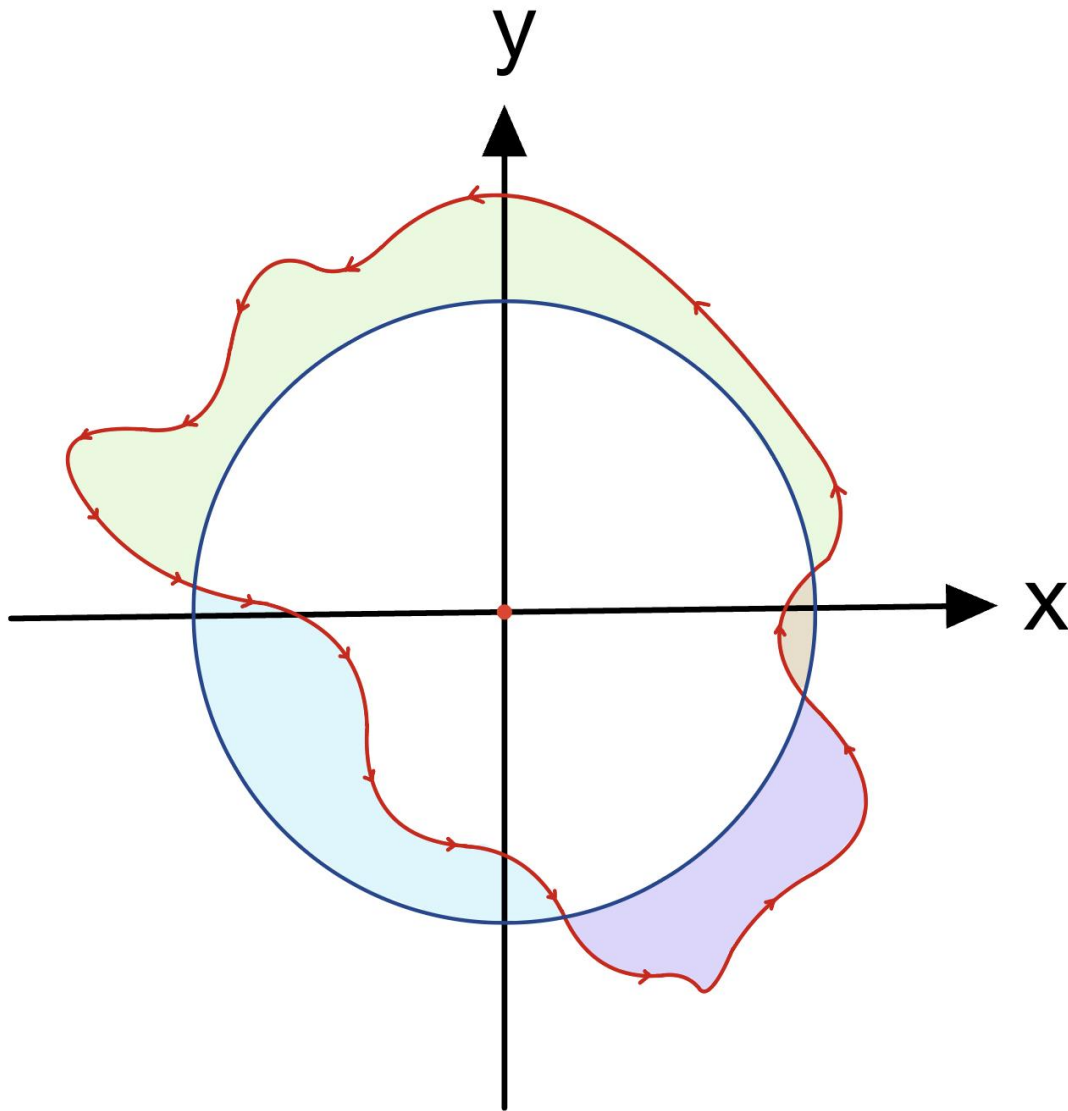
→ Der Weg kann problemlos auf einen Punkt zusammengezogen werden.

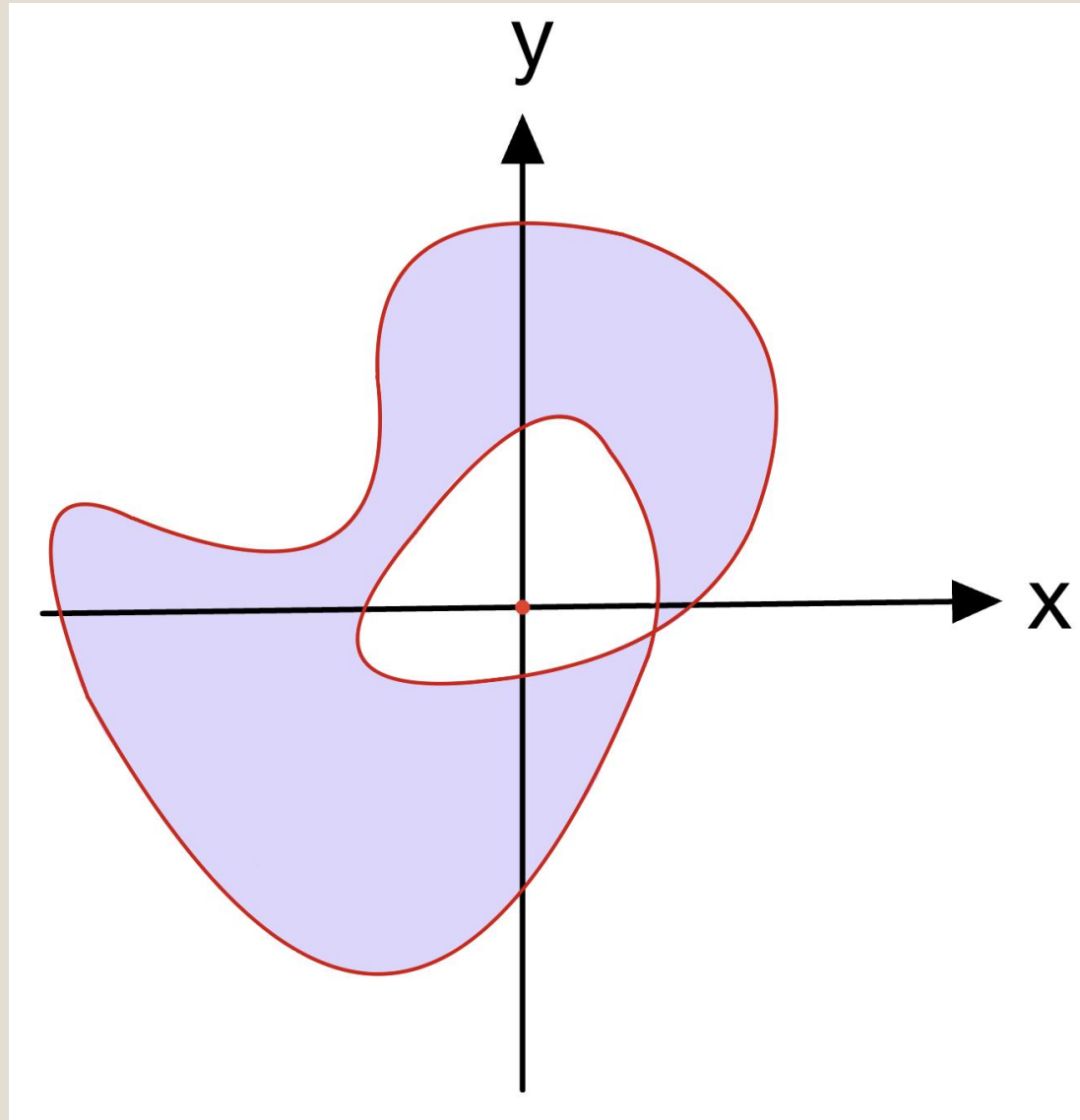


Variante 2

- Der Weg umschließt den Punkt, indem das Vektorfeld nicht einfach zusammenhängend ist.
- Wir zeichnen den Kreis ein, für den die Arbeit $= 0$ ist.
- Einerseits kann jeder Weg um den Punkt $(0,0)$ damit in Teilflächen unterteilt werden, für die wiederum die Arbeit verschwindet.
- Jede Teilfläche ist durch ein Wegstück entlang des Kreises beschränkt und ein Stück entlang unseres Pfads.

Da $\text{rot}(\vec{v}) = 0 = \int_K \vec{v} \cdot d\vec{r} + \int_P \vec{v} \cdot d\vec{r}$ und $\int_K \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$ gilt, muss $\int_P \vec{v} \cdot d\vec{r}$ auch identisch Null sein.





Variante 3

- Der Weg windet sich mehrmals um die z-Achse.
- Hierbei kann die Kurve wieder in Flächen aufgeteilt werden, die von dem Pfad begrenzt werden und sich on einem einfach zusammenhängenden Abschnitt des Vektorfelds befinden.
- Generell gilt: weist der Pfad auch noch eine z-Komponente auf, spielt dies keine Rolle, da sich das Vektorfeld nur in der xy-Ebene befindet. Die z-Komponente trägt nie zur Arbeitsberechnung bei.

Erinnerung

Konservativ: Die Arbeit entlang von allen Wegen verschwinden (egal ob $D(\vec{v})$ einfach zusammenhängend ist oder nicht).

Da dies im Allgemeinen schwer für jeden einzelnen Weg zu überprüfen ist, zeigt man dies oft über das Kriterium $\text{rot}(\vec{v}) = 0$.

Dann kommt aber eine neue Bedingung hinzu:

$$\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0} \quad + \quad \boxed{D(\vec{v}) \text{ ist einfach zusammenhängend}} \rightarrow \vec{v} \text{ ist ein Potentialfeld}$$

Wie wir in der letzten Intuitionsübung gesehen haben, gibt es auch Potentialfelder mit nicht einfach zusammenhängenden Definitionsräumen. D.h. Vektorfelder, die die oben genannte Bedingung nicht erfüllen können trotzdem konservativ sein (Eine genauere Prüfung des Vektorfelds ist erforderlich).

Bemerkung Aufgabe 2

2. (♥) Bestimmen Sie das Potential f des Coulombfelds

$$\vec{v}(\vec{r}) = -C \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

auf dem Gebiet $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

$$f(x, y, z) = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ist ein Potential von $\vec{v}$ (anders geschrieben $f(\vec{r}) = \frac{C}{|\vec{r}|}$).

Wo ist die Konstante in den Lösungen?

In der Regel wird für das Coulombpotential eine Randbedingung im Unendlichen gesetzt:

Dort soll das Potential verschwinden, da die Feldvektoren die Länge 0 besitzen. Damit dies erfüllt ist, muss die Konstante C identisch zu Null sein.

Aufgabe 3

3. Wir betrachten das wirbelfreie Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters,

$$\vec{v} : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right),$$

aber jetzt nur im Halbraum $x > 0$. Dieser Definitionsbereich ist einfach zusammenhängend. Also besitzt $\vec{v}$ darin ein Potential f .

- (a) Berechnen Sie f durch Bestimmung der Arbeit von $\vec{v}$ vom Punkt $(1, 0, 0)$ zum Punkt (x, y, z) längs eines geeigneten Weges.
- (b) Verifizieren Sie, dass $\text{grad } f = \vec{v}$ ist.

Bei solchen Aufgaben ist darauf zu achten, dass der gewählte Weg am Ende die gesamte Potentialfunktion liefert und nicht gewisse Teile des Vektorfelds ignoriert.

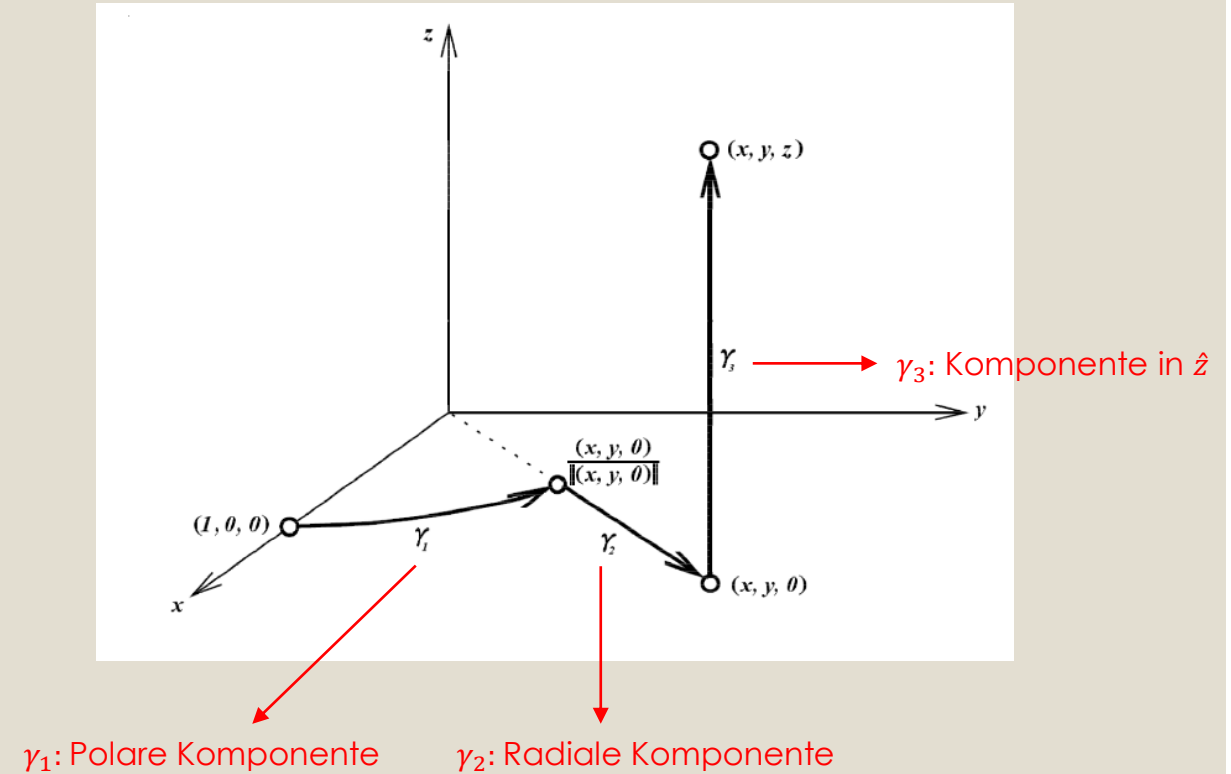
Wenn man beispielsweise nur ein Weg in der xy-Ebene wählt, kann man nie die Abhängigkeit des Potentials von z bestimmen, da auf dem gesamten Weg $z = 0$ gilt.

Aufgabe 3

Das ist ähnlich zu Zylinderkoordinaten:

Wir wissen, dass wir den gesamten Raum $\mathbb{R}^3$ mit einem **radialen Anteil**, einem **polaren Winkel** und einer **Höhe z** abdecken können.

Um die Potentialfunktion für den gesamten Raum $\mathbb{R}^3$ zu finden, sollte der Weg alle drei Komponenten beinhalten.



Einstiegsaufgabe – Separation der Variablen

Wie lautet die Lösungsfunktion der separierbaren Differentialgleichung

$$y' = 2 + y - 2x^2 - x^2y$$

Zum AWP $y(0) = 0$?

Lösung – Einstiegsaufgabe

Man formt die Gleichung durch ausklammern um:

$$y' = 2 + y - x^2(2 + y) = (2 + y)(1 - x^2) \Leftrightarrow \frac{y'}{2 + y} = 1 - x^2$$

Wir setzen $h(y) = \frac{1}{2+y}$ und schreiben y' als $\frac{dy}{dx}$ (Das ist wie eine Substitution: $y(x) = y$) und integrieren auf beiden Seiten nach x

$$\int h(y) \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx = \int 1 - x^2 dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{2 + y} dy = \int 1 - x^2 dx$$

$$\ln|2 + y| = x - \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow 2 + y = A \cdot e^{x - \frac{x^3}{3}}, \quad A = e^C$$

$$y = A \cdot e^{x - \frac{x^3}{3}} - 2 \quad (\text{Allgemeine Lösung})$$

Überprüfung der Allgemeinen Lösung

$y(x) = A \cdot e^{x-\frac{x^3}{3}} - 2$ muss die DGL $\frac{y'}{2+y} = 1 - x^2$ erfüllen.

$$y' = A \cdot e^{x-\frac{x^3}{3}} \cdot (1 - x^2)$$

$$\frac{y'}{2+y} = \frac{A \cdot e^{x-\frac{x^3}{3}} \cdot (1 - x^2)}{2 + A \cdot e^{x-\frac{x^3}{3}} - 2} = 1 - x^2$$

Lösung – Einstiegsaufgabe

Lösung zum Anfangswertproblem (AWP)

$$y(0) = A \cdot e^{0-0} - 2 = ! 0$$

$$\rightarrow A = 2$$

Die spezielle Lösung zum AWP $y(0) = 0$ lautet demnach:

$$y(x) = 2 \cdot e^{x - \frac{x^3}{3}} - 2$$

DGL's mit Substitution

Oft können nicht separierbare DGL's mit einer Substitution in eine separierbare DGL umgewandelt werden.

Vorgehen für eine DGL der Form $y' = f(x,y)$:

1. Bestimme eine geeignete Substitution $u = u(x) = g(x,y(x))$
2. Löse diese nach $y(x)$ auf & leite sie nach x ab : $y'(x)$
3. Setze dies gleich mit der DGL $y' = f(x,y)$ mit $y(x)$ aus 2. in $f(x,y)$ eingesetzt
4. Bestimme $u(x)$
5. Rücksubstitution
6. AWP

Beispielaufgabe

Bestimme die Allgemeine Lösung der DGL

$$xy' = y - 2x - xe^{\frac{y}{x}}$$

Lösung Beispielsaufgabe

Wir bringen die DGL in die Form $y' = f(x,y)$:

$$y' = \frac{y}{x} - 2 - e^{\frac{y}{x}}$$

Nach dem Vorgehen:

1. Bestimme eine geeignete Substitution $u = u(x) = g(x, y(x))$

Da jeweils der Term $\frac{y}{x}$ vorkommt verwenden wir diesen als Substitution: $u(x) = \frac{y(x)}{x}$

2. Löse diese nach $y(x)$ auf & leite sie nach x ab : $y'(x)$

$$y(x) = u(x) \cdot x$$

$$y'(x) = u(x) + x \cdot u'(x)$$

Lösung Beispielaufgabe

3. Setze dies gleich mit der DGL $y' = f(x,y)$ mit $y(x)$ aus 2. in $f(x,y)$ eingesetzt

$$y' = u(x) - 2 - e^{u(x)} = u(x) + x \cdot u'(x)$$

4. Bestimme $u(x)$

$$u(x) - 2 - e^{u(x)} = u(x) + x \cdot u'(x) \quad / -u(x)$$

$$-2 - e^{u(x)} = x \cdot u'(x)$$

Lösung Beispielaufgabe

4. Bestimme $u(x)$

$$-\frac{1}{x} = \frac{1}{2 + e^{u(x)}} \cdot u'(x) \quad (\text{Separierbare DGL})$$

$$-\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{2 + e^u} du$$


$$-\ln|x| + C$$


$$\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{e^u}{e^u + 2}\right)$$

Lösung Beispielaufgabe - Integralrechnung

Um das Integral $\int \frac{1}{2+e^u} du$ zu lösen verwenden wir die Substitution $g = 2 + e^u$

Es folgt $dg = e^u du$ und das transformierte Integral lautet

$$\int \frac{1}{g} \cdot \frac{dg}{e^u} = \int \frac{1}{g} \cdot \frac{dg}{g-2} = \int \frac{1}{g(g-2)} dg$$

Diese Integral kann man z. B. über eine Partialbruchzerlegung lösen:

$$\frac{1}{g(g-2)} = \frac{A}{g} + \frac{B}{g-2} \Leftrightarrow Ag - 2A + Bg = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} g^1 : A + B = 0 \\ g^0 : -2A = 1 \end{array} \right\} \quad A = -\frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{2}$$

Lösung Beispielaufgabe - Integralrechnung

$$\int \frac{1}{g(g-2)} dg = \int -\frac{1}{2g} + \frac{1}{2(g-2)} dg = -\frac{1}{2} \ln|g| + \frac{1}{2} \ln|g-2| (+C) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{g-2}{g} \right| (+C)$$

Rücksubstitution: $g = 2 + e^u$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{e^u}{2 + e^u} \right) (+C)$$

Lösung Beispielaufgabe

4. Bestimme $u(x)$

$$-\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{2 + e^u} du$$

$$-\ln|x| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{e^u}{2 + e^u}\right)$$

$$\ln|x^{-2}| + B = \ln\left(\frac{e^u}{2 + e^u}\right)$$

$$D \cdot x^{-2} = \frac{e^u}{2 + e^u}$$

Lösung Beispielaufgabe

$$\frac{D}{x^2} = \frac{1}{2e^{-u} + 1}$$

$$\frac{x^2}{2D} - \frac{1}{2} = e^{-u}$$

$$-\ln \left| \frac{x^2}{E} - \frac{1}{2} \right| = u(x)$$

5. Rücksubstitution

$$-\ln \left| \frac{x^2}{E} - \frac{1}{2} \right| = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow -x \cdot \ln \left| \frac{x^2}{E} - \frac{1}{2} \right| = y(x)$$

Überprüfung der Lösung

$$y' = \frac{y}{x} - 2 - e^{\frac{y}{x}}$$

$$-\ln \left| \frac{x^2}{E} - \frac{1}{2} \right| + (-x) \cdot \frac{1}{\frac{x^2}{E} - \frac{1}{2}} \cdot \frac{2x}{E} = -\ln \left| \frac{x^2}{E} - \frac{1}{2} \right| - 2 - e^{-\ln \left| \frac{x^2}{E} - \frac{1}{2} \right|}$$

$$\frac{2x^2}{E} \cdot \frac{1}{\frac{x^2}{E} - \frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{\frac{x^2}{E} - \frac{1}{2}}$$

$$\frac{2x^2}{E} \cdot \frac{1}{\frac{x^2}{E} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{x^2}{E} - \frac{1}{2}} \left(2 \cdot \frac{x^2}{E} - \frac{1}{2} \right) + 1$$

$$\frac{2x^2}{E} = \frac{2x^2}{E} - 1 + 1$$

Lineare Differentialgleichungen

Definition. Seien p, q beliebige Funktionen in einer Variable x . Eine Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$y'(x) = p(x) \cdot y(x) + q(x)$$

ist eine **lineare Differentialgleichung erster Ordnung**.

- Die Lösung von linearen DGL's erster Ordnung sind lineare Funktionen (= Geraden)

$$y(x) = a \cdot x + b$$

- Die Funktion $q(x)$ ist dabei der **inhomogene Teil / das Störglied**
→ Wegen diesem Teil kann die DGL nicht über die SdV gelöst werden

Homogene & Inhomogene DGL's 1. Ordnung

Jede lineare DGL 1. Ordnung kann in eine homogene Differentialgleichung verwandelt werden, indem man das Störglied entfernt.

Bsp: $y' = x^2y + 5x$

Inhomogene DGL (I): $y' = x^2y + 5x$

Homogene DGL (H): $y' = x^2y \rightarrow$ (H) kann durch Separation der Variablen gelöst werden

Was bringt das & wie findet man aber die Allgemeine Lösung für (I) ?

Homogene & Inhomogene DGL's 1. Ordnung

Satz. Die allgemeine Lösung y_1 von (I) ist die Summe einer speziellen Lösung y_0 von (I) und der allgemeinen Lösung y_h von (H):

$$y_1 = y_0 + y_h.$$

Man nennt y_0 die **partikuläre Lösung** und y_h die **homogene Lösung** der Differentialgleichung.

Wir benötigen für die Lösung von (I) die Allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL und eine Lösung der inhomogenen DGL um alle Lösungen von (I) zu finden.

Wie findet man diese eine partikuläre Lösung für (I) ?

→ Man ratet einen Ansatz oder verwendet den Lagrange-Algorithmus

Ansatz raten

Um einen Ansatz zu erraten, gibt es hilfreiche Tabellen (Funktioniert nicht immer!)

Summen von Ansätzen zu verschiedenen Störfunktionen funktionieren meistens aber Produkte nur selten.

Man setzt den Ansatz einfach in die DGL ein und schaut ob man eine Lösung für die Konstanten erhält.

Störfunktion	Ansatz für y_p
Konstante	$y_p = A$
lin. Fkt.	$y_p = Ax + B$
quadr. Fkt.	$y_p = Ax^2 + Bx + C$
Polynom n-Grades	$y_p = A + Bx + Cx^2 + \dots + Zx^n$
$A\sin(\omega x)$ $B\cos(\omega x)$ $C\sin(\omega x) + D\cos(\omega x)$	$y_p = C\sin(\omega x) + D\cos(\omega x)$
$A \cdot e^{bx}$	$y_p = C \cdot e^{bx}$ oder falls $b = -a$: $y_p = Cx \cdot e^{bx}$

Beispielaufgabe Ansatz raten

Welchen Ansatz könnte man für den Störterm der DGL $y' = 2y + 1 - x^2$ wählen und zu welcher partikulären Lösung führt dieser?

Beispiel Ansatz raten

$$\text{DGL: } y'(x) = 2y + 1 - x^2$$

Das Störglied ist ein Polynom 2. Grades. Daher verwenden wir den Ansatz $y(x) = Ax^2 + Bx + C$

Wir setzen diesen in die DGL ein:

$$2Ax + B = 2Ax^2 + 2Bx + 2C + 1 - x^2$$

$$-2Ax^2 + (2A - 2B)x + (B - 2C) = 1 - x^2$$

$$x^2: -2A = -1 \rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$x^1: 2A - 2B = 0 \rightarrow A = B \rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$x^0: B - 2C = 1 \rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

Die partikuläre Lösung lautet also: $y_p = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

Algorithmus von Lagrange

Vorgehen:

1. Lösung der Homogenen DGL finden (Separation der Variablen)
2. Konstante C von x abhängig machen $C \rightarrow C(x)$
3. Homogene Funktion ableiten $y'(x) = C'(x) \cdot \dots$ (Produktregel !!)
4. $y'(x)$ in die Inhomogene DGL einsetzen -> jetzt sollte nur noch $C'(x)$ vorkommen
5. $C(x)$ durch Integration berechnen
6. Lösung für $C(x)$ in die Homogene Lösung einsetzen

Beispielaufgabe

Wie lautet die Lösung der DGL $y'(x) = \frac{1}{x}y + 4x^2$ über die Variation der Konstanten?

Beispiel – Algorithmus von Lagrange

Wir betrachten wieder die inhomogene DGL $y'(x) = \frac{1}{x}y + 4x^2$

1. Die homogene DGL (H) lautet $\frac{y'(x)}{y} = \frac{1}{x}$ und besitzt die Lösung $y(x) = C \cdot x$
2. Wir setzen $C = C(x) \rightarrow y(x) = C(x) \cdot x$
3. Wir leiten ab: $y'(x) = C'(x) \cdot x + C(x)$
4. In die DGL einsetzen: $C'(x) \cdot x + C(x) = C(x) \cdot \frac{x}{x} + 4x^2 \Leftrightarrow C'(x) = 4x$
5. Integration nach x: $\int C'(x) dx = \int 4x dx \rightarrow C(x) = 2x^2 + A$
6. In homogene Lösung einsetzen: $y(x) = (2x^2 + A) \cdot x = 2x^3 + A \cdot x \quad (\hat{=} y_h + y_p)$