ANALYSIS II

Übungsstunde X

Ablauf

- Nachbesprechung Serie 9
- Repetition Stetigkeit
- DGL’s mit Substitution
- Lineare DGL’s
- Homogene & Partikuläre Lösung
- Lagrange Algorithmus

Einstiegsaufgabe – Separation der Variablen

Wie lautet die Lösungsfunktion der separierbaren Differentialgleichung

$$y' = 2 + y - 2x^2 - x^2y$$

Zum AWP y(0) = 0 ?

Lösung – Einstiegsaufgabe

Man formt die Gleichung durch ausklammern um:

$$y' = 2 + y - x^2(2 + y) = (2 + y)(1 - x^2) \iff \frac{y'}{2 + y} = 1 - x^2$$

Wir setzen $h(y) = \frac{1}{2+y}$ und schreiben y' als $\frac{dy}{dx}$ (Das ist wie eine Substitution: y(x) = y) und integrieren auf beiden Seiten nach x

$$\int h(y) \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx = \int 1 - x^2 \, dx \iff \int \frac{1}{2 + y} dy = \int 1 - x^2 \, dx$$

$$\ln|2 + y| = x - \frac{x^3}{3} + \mathrm{C} \iff 2 + y = A \cdot e^{x - \frac{x^3}{3}}, \qquad A = e^C$$

$$y = A \cdot e^{x - \frac{x^3}{3}} - 2 \quad \text{(Allgemeine Lösung)}$$

Überprüfung der Allgemeinen Lösung

$y(x) = A \cdot e^{x-\frac{x^3}{3}} - 2$ muss die DGL $\frac{y'}{2+y} = 1 - x^2$ erfüllen.

$$y' = A \cdot e^{x-\frac{x^3}{3}} \cdot (1 - x^2)$$

$$\frac{y'}{2+y} = \frac{A \cdot e^{x-\frac{x^3}{3}} \cdot (1 - x^2)}{2 + A \cdot e^{x-\frac{x^3}{3}} - 2} = 1 - \mathrm{x}^2$$

Lösung – Einstiegsaufgabe

Lösung zum Anfangswertproblem (AWP)

$$y(0) = A \cdot e^{0-0} - 2 =! \ 0$$

$$\rightarrow A = 2$$

Die spezielle Lösung zum AWP y(0) = 0 lautet demnach:

$$y(x) = 2 \cdot e^{x-\frac{x^3}{3}} - 2$$

Erinnerung

Konservativ: Die Arbeit entlang von <u>allen</u> Wegen verschwinden (egal ob $D(\vec{v})$ einfach zusammenhängend ist oder nicht).

Da dies im Allgemeinen schwer für jeden einzelnen Weg zu überprüfen ist, zeigt man dies oft über das Kriterium $rot(\vec{v}) = 0$.

Dann kommt aber eine neue Bedingung hinzu:

$$rot(\vec{v}) = \vec{0} \quad + \boxed{D(\vec{v})\ ist\ einfach\ zusammenhängend} \rightarrow \vec{v}\ ist\ ein\ Potentialfeld$$

Wie wir in der letzten Intuitionsübung gesehen haben, gibt es auch Potentialfelder mit nicht einfach zusammenhängenden Definitionsräumen. D.h. Vektorfelder, die die oben genannte Bedingung nicht erfüllen können trotzdem konservativ sein (Eine genauere Prüfung des Vektorfelds ist erforderlich).

Bemerkung Aufgabe 2

2. (♥) Bestimmen Sie das Potential f des Coulombfelds

$$\vec{v}(\vec{r}) = -C\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

auf dem Gebiet $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

$$f(x,y,z) = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ist ein Potential von $\vec{v}$ (anders geschrieben $f(\vec{r}) = \frac{C}{|\vec{r}|}$).

Wo ist die Konstante in den Lösungen?

In der Regle wird für das Coulombpotential eine Randbedingung im Unendlichen gesetzt:

Dort soll das Potential verschwinden, da die Feldvektoren die Länge 0 besitzen. Damit dies erfüllt ist, muss die Konstante C identisch zu Null sein.

Aufgabe 3

3. Wir betrachten das wirbelfreie Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters,

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right),$$

aber jetzt nur im Halbraum $x > 0$. Dieser Definitionsbereich ist einfach zusammenhängend. Also besitzt $\vec{v}$ darin ein Potential f.

(a) Berechnen Sie f durch Bestimmung der Arbeit von $\vec{v}$ vom Punkt $(1, 0, 0)$ zum Punkt (x, y, z) längs eines geeigneten Weges.

(b) Verifizieren Sie, dass $\operatorname{grad} f = \vec{v}$ ist.

Bei solchen Aufgaben ist darauf zu achten, dass der gewählte Weg am Ende die gesamte Potentialfunktion liefert und nicht gewisse Teile des Vektorfelds ignoriert.

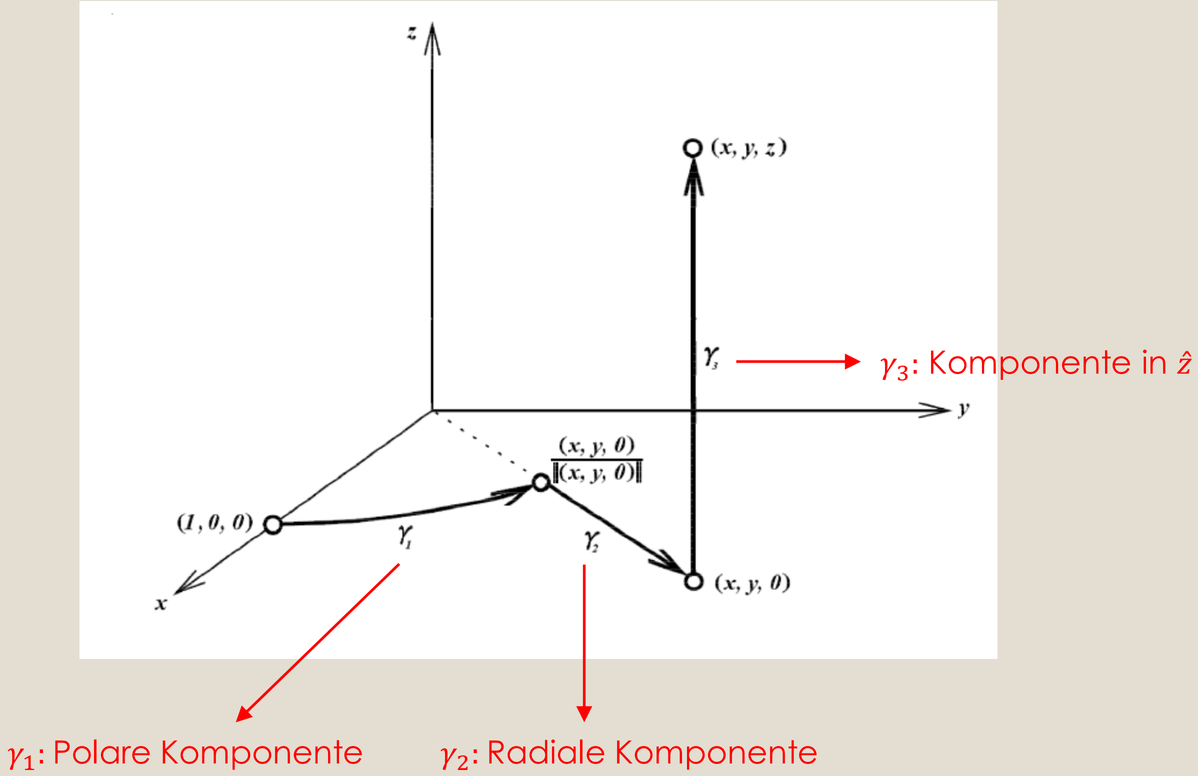
Wenn man beispielsweise nur ein Weg in der xy-Ebene wählt, kann man nie die Abhängigkeit des Potentials von z bestimmen, da auf dem gesamten Weg z = 0 gilt.

Aufgabe 3

Das ist ähnlich zu Zylinderkoordinaten:

Wir wissen, dass wir den gesamten Raum $\mathbb{R}^3$ mit einem **radialen Anteil**, einem **polaren Winkel** und einer **Höhe z** abdecken können.

Um die Potentialfunktion für den gesamten Raum $\mathbb{R}^3$ zu finden, sollte der Weg alle drei Komponenten beinhalten.



DGL‘s mit Substitution

Oft können nicht separierbare DGL‘s mit einer Substitution in eine separierbare DGL umgewandelt werden.

<u>Vorgehen für eine DGL der Form y‘ = f(x,y):</u>

1. Bestimme eine geeignete Substitution u = u(x) = g(x,y(x))
2. Löse diese nach y(x) auf & leite sie nach x ab : y‘(x)
3. Setze dies gleich mit der DGL y‘ = f(x,y) mit y(x) aus 2. in f(x,y) eingesetzt
4. Bestimme u(x)
5. Rücksubstitution
6. AWP

Beispielaufgabe

Bestimme die Allgemeine Lösung der DGL

$$xy' = y - 2x - xe^{\frac{y}{x}}$$

Lösung Beispielsaufgabe

Wir bringen die DGL in die Form y‘ = f(x,y):

$$y' = \frac{y}{x} - 2 - e^{\frac{y}{x}}$$

Nach dem Vorgehen:

1. Bestimme eine geeignete Substitution u = u(x) = g(x, y(x))

   Da jeweils der Term $\frac{y}{x}$ vorkommt verwenden wir diesen als Substitution: $u(x) = \frac{y(x)}{x}$

2. Löse diese nach y(x) auf & leite sie nach x ab : y‘(x)

$$y(x) = u(x) \cdot x$$

$$y'(x) = u(x) + x \cdot u'(x)$$

Lösung Beispielaufgabe

3. Setze dies gleich mit der DGL y‘ = f(x,y) mit y(x) aus 2. in f(x,y) eingesetzt

$$y' = u(x) - 2 - e^{u(x)} = u(x) + x \cdot u'(x)$$

4. Bestimme u(x)

$$u(x) - 2 - e^{u(x)} = u(x) + x \cdot u'(x) \quad /-u(x)$$

$$-2 - e^{u(x)} = x \cdot u'(x)$$

Lösung Beispielaufgabe

4. Bestimme u(x)

$$-\frac{1}{x} = \frac{1}{2 + e^{u(x)}} \cdot u'(x) \qquad \text{(Separierbare DGL)}$$

$$-\int \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{1}{2 + e^{u}}\, du$$

$$-\ln|x| + C \qquad \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{e^{u}}{e^{u} + 2}\right)$$

Lösung Beispielaufgabe - Integralrechnung

Um das Integral $\int \frac{1}{2+e^u}\,du$ zu lösen verwenden wir die Substitution $g = 2 + e^u$

Es folgt $dg = e^u du$ und das transformierte Integral lautet

$$\int \frac{1}{g} \cdot \frac{dg}{e^u} = \int \frac{1}{g} \cdot \frac{dg}{g-2} = \int \frac{1}{g(g-2)}\,dg$$

Diese Integral kann man z. B. über eine Partialbruchzerlegung lösen:

$$\frac{1}{g(g-2)} = \frac{A}{g} + \frac{\mathrm{B}}{g-2} \Leftrightarrow Ag - 2A + Bg = 1$$

$$\left.\begin{array}{ll} g^1: & A + B = 0 \\ g^0: & -2A = 1 \end{array}\right\} \quad A = -\frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{2}$$

Lösung Beispielaufgabe - Integralrechnung

$$\int \frac{1}{g(g-2)}\, dg = \int -\frac{1}{2g} + \frac{1}{2(g-2)}\, dg = -\frac{1}{2}\ln|g| + \frac{1}{2}\ln|g-2| \ (+C) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{g-2}{g}\right| (+\mathrm{C})$$

Rücksubstitution: $g = 2 + e^u$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{e^u}{2+e^u}\right) (+C)$$

Lösung Beispielaufgabe

4. Bestimme u(x)

$$-\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{2+e^u}\, du$$

$$-\ln|x| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{e^u}{2+e^u}\right)$$

$$\ln|x^{-2}| + B = \ln\left(\frac{e^u}{2+e^u}\right)$$

$$D \cdot x^{-2} = \frac{e^u}{2+e^u}$$

Lösung Beispielaufgabe

$$\frac{D}{x^2} = \frac{1}{2e^{-u} + 1}$$

$$\frac{x^2}{2D} - \frac{1}{2} = e^{-u}$$

$$-\ln\left|\frac{x^2}{E} - \frac{1}{2}\right| = u(x)$$

5. Rücksubstitution

$$-\ln\left|\frac{x^2}{E} - \frac{1}{2}\right| = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow -x \cdot \ln\left|\frac{x^2}{E} - \frac{1}{2}\right| = y(x)$$

Überprüfung der Lösung

$$y' = \frac{y}{x} - 2 - e^{\frac{y}{x}}$$

$$-\ln\left|\frac{x^2}{E} - \frac{1}{2}\right| + (-x) \cdot \frac{1}{\frac{x^2}{E} - \frac{1}{2}} \cdot \frac{2x}{E} = -\ln\left|\frac{x^2}{E} - \frac{1}{2}\right| - 2 - e^{-\ln\left|\frac{x^2}{E} - \frac{1}{2}\right|}$$

$$\frac{2x^2}{E} \cdot \frac{1}{\frac{x^2}{E} - \frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{\frac{x^2}{E} - \frac{1}{2}}$$

$$\frac{2x^2}{E} \cdot \frac{1}{\frac{x^2}{E} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{x^2}{E} - \frac{1}{2}} (2 \cdot \frac{x^2}{E} - \frac{1}{2}) + 1$$

$$\frac{2x^2}{E} = \frac{2x^2}{E} - 1 + 1$$

Lineare Differentialgleichungen

Definition. Seien p, q beliebige Funktionen in einer Variable x. Eine Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$y'(x) = p(x) \cdot y(x) + q(x)$$

ist eine **lineare Differentialgleichung erster Ordnung**.

- Die Lösung von linearen DGL's erster Ordnung sind lineare Funktionen (= Geraden)

$$y(x) = a \cdot x + b$$

- Die Funktion q(x) ist dabei der inhomogene Teil / das Störglied

  → Wegen diesem Teil kann die DGL nicht über die SdV gelöst werden

Homogene & Inhomogene DGL's 1. Ordnung

Jede lineare DGL 1. Ordnung kann in eine homogene Differentialgleichung verwandelt werden, indem man das Störglied entfernt.

Bsp: $y' = x^2 y + 5x$

Inhomogene DGL (I): $y' = x^2 y + 5x$

Homogene DGL (H): $y' = x^2 y$ → (H) kann durch Separation der Variablen gelöst werden

Was bringt das & wie findet man aber die Allgemeine Lösung für (I) ?

Homogene & Inhomogene DGL's 1. Ordnung

Satz. *Die allgemeine Lösung y_1 von (I) ist die Summe* einer *speziellen Lösung y_0 von (I) und der allgemeinen Lösung y_h von (H):*

$$y_1 = y_0 + y_h.$$

Man nennt y_0 die **partikuläre Lösung** *und y_h die* **homogene Lösung** *der Differentialgleichung.*

Wir benötigen für die Lösung von (I) die Allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL und <u>eine</u> Lösung der inhomogenen DGL um alle Lösungen von (I) zu finden.

Wie findet man diese eine partikuläre Lösung für (I) ?

→ Man ratet einen Ansatz oder verwendet den Lagrange−Algorithmus

Ansatz raten

Störfunktion	Ansatz für y_p
Konstante	$y_p = A$
lin. Fkt. quadr. Fkt. Polynom n-Grades	$y_p = Ax + B$ $y_p = Ax^2 + Bx + C$ $y_p = A + Bx + Cx^2 + ... + Zx^n$
$Asin(\omega x)$ $Bcos(\omega x)$ $Csin(\omega x) + Dcos(\omega x)$	$y_p = Csin(\omega x) + Dcos(\omega x)$
$A \cdot e^{bx}$	$y_p = C \cdot e^{bx}$ oder falls $b = -a$: $y_p = Cx \cdot e^{bx}$

Um einen Ansatz zu erraten, gibt es hilfreiche Tabellen (Funktioniert nicht immer!)

Summen von Ansätzen zu verschiedenen Störfunktionen funktionieren meistens aber Produkte nur selten.

Man setzt den Ansatz einfach in die DGL ein und schaut ob man eine Lösung für die Konstanten erhält.

Beispiel Ansatz raten

DGL: $y'(x) = 2y + 1 - x^2$

Das Störglied ist ein Polynom 2. Grades. Daher verwenden wir den Ansatz $\mathrm{y}(\mathrm{x}) = Ax^2 + Bx + C$

Wir setzen diesen in die DGL ein:

$$2Ax + B = 2(Ax^2 + Bx + C) + 1 - x^2$$

Geben Sie hier eine Formel ein.

Beispiel Ansatz raten

Zum Überprüfen setzen wir unsere partikuläre Lösung in die DGL ein:

DGL: $y'(x) = yx + 4x^2$

$$-4 = -4x^2 + 4x^2$$

Algorithmus von Lagrange

Vorgehen:

1. Lösung der Homogenen DGL finden (Separation der Variablen)
2. Konstante C von x abhängig machen C → C(x)
3. Homogene Funktion ableiten $y'(x) = \mathrm{C}'(\mathrm{x}) \cdot$ ... (Produktregel !!)
4. y'(x) in die Inhomogene DGL einsetzen -> jetzt sollte nur noch C'(x) vorkommen
5. C(x) durch Integration berechnen
6. Lösung für C(x) in die Homogene Lösung einsetzen

Beispielaufgabe

Wie lautet die Lösung der DGL $y'(x) = \frac{1}{x}y + 4x^2$ über die Variation der Konstanten?

Beispiel – Algorithmus von Lagrange

Wir betrachten wieder die inhomogene DGL $y'(x) = \frac{1}{x}y + 4x^2$

1. Die homogene DGL (H) lautet $\frac{y'(x)}{y} = \frac{1}{x}$ und besitzt die Lösung $y(x) = C \cdot x$
2. Wir setzen C = C(x) $\rightarrow y(x) = C(x) \cdot x$
3. Wir leiten ab: $y'(x) = C'(x) \cdot \mathrm{x} + \mathrm{C(x)}$
4. In die DGL einsetzen: $C'(x) \cdot \mathrm{x} + \mathrm{C(x)} = C(x) \cdot \frac{x}{x} + 4x^2 \iff C'(x) = 4x$
5. Integration nach x: $\int C'(x)\, dx = \int 4x\, dx \rightarrow C(x) = 2x^2 + A$
6. In homogene Lösung einsetzen: $\mathrm{y(x)} = (2x^2 + A) \cdot x = 2x^3 + A \cdot x \quad (\widehat{=}\ y_h + y_p)$