



ANALYSIS II

Übungsstunde III

- Intuationsübung
- Nachbesprechung der Serie I
- Vorlesungsstoff/Vorbesprechung Serie II
 - Verallgemeinerte Kettenregel
 - Richtungsableitung/Gradient
 - Funktionen in drei Variablen

Ablauf

Multiple Choice – Serie I

Die zweifach stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, für welche die partiellen Ableitungen f_{xx} und f_{yy} identisch verschwinden, sind genau

☐ ✗ die Produkte einer Funktion von x mit einer Funktion von y . S

☐ ✗ die Produkte von zwei linearen Funktionen. S

☐ ✗ die Produkte einer linearen Funktion von x mit einer linearen Funktion von y . S

☒ ✓ die Funktionen der Gestalt $a + bx + cy + dxy$ für Konstanten a, b, c, d . S ✓

Bewertungsmethode: **SC1/0** ?

Serie I – Aufgabe 1d)

1. (♥) Gegeben ist die Funktion

$$f : (x, y) \mapsto \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

- (a) Bestimmen Sie den (aufgrund der gegebenen Formel grösstmöglichen) Definitionsbereich sowie den (zugehörigen) Wertebereich von f .
- (b) Diskutieren Sie die Niveaulinien von f und zeichnen sie für die Funktionswerte $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ und 1 auf.
- (c) Berechnen Sie die lineare Ersatzfunktion von f im Punkt $(1, 1)$.
- ➡ (d) Die Grössen x und y seien in der Nähe von $(1, 1)$ und werden auf 1% genau gemessen. Schätzen Sie den relativen Fehler der Grösse $z = f(x, y)$ ab.
- (e) Berechnen Sie alle zweiten partiellen Ableitungen von f und überprüfen Sie den Satz von Schwarz.

Serie I - Aufgabe 5

5. (★) Sei f eine *beliebige* differenzierbare Funktion einer Variablen. Zeigen Sie, dass alle Tangentialebenen der Fläche

$$z = y \cdot f\left(\frac{x}{y}\right)$$

durch den Punkt $(0, 0, 0)$ gehen.

Verallgemeinerte Kettenregel

Die Ableitung einer Funktion mit parametrisierten Variablen lautet:

$$F'(t) = \text{grad}(f(\vec{r}(t))) \cdot \vec{r}'(t) = f_x(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{y}(t) + f_z(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{z}(t)$$

- Gegeben:
- $f(x,y,z)$ Eine Funktion mit den Variablen x,y,z
- Die Parametrisierung $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$

- Direkte Berechnung (wie bisher):
 - Die Parametrisierung $(x(t), y(t), z(t))$ in die Funktion einsetzen
 - Funktion in $t \longrightarrow$ Ableitung $f'(t)$ berechnen
- Berechnung über die Verallgemeinerte Kettenregel
 - Partielle Ableitungen f_x, f_y, f_z berechnen
 - Parametrisierung in die partiellen Ableitungen einsetzen
 - Ableitung der Parametrisierung $x'(t), y'(t), z'(t)$ berechnen
 - $f'(t) = f_x(r(t)) \cdot x'(t) + f_y(r(t)) \cdot y'(t) + f_z(r(t)) \cdot z'(t)$

Beispielaufgabe

- Berechne die Ableitung folgender Parametrisierter Funktion (einmal direkt und einmal über die verallgemeinerte Kettenregel)

$$f(x, y) = \ln(x) + e^y + 2 \text{ mit } x(t) = t^3, \quad y(t) = \ln(t)$$

Funktionen in 3 Variablen

- $\text{Grad}(f(r)) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \cdot f \longrightarrow \text{Ein Vektor in } \mathbb{R}^3$

- Integrabilitätsbedingungen: $\varphi = f_x \quad / \quad \psi = f_y \quad / \quad \chi = f_z$

➤ Bedingung erfüllt, wenn:

- $\varphi_y = \psi_x$
- $\psi_z = \chi_y$
- $\varphi_z = \chi_x$

Richtungsableitung

Definition. Die **Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{e}$ an der Stelle $\vec{r}_0$** ist

$$D_{\vec{e}}f(\vec{r}_0) := \text{grad } f(\vec{r}_0) \cdot \vec{e}.$$

Dabei ist $\vec{e}$ ein Einheitsvektor.

Basisprüfung Sommer 2022 – Single Choice

Frage 17 (IV) Gegeben ist die Funktion $f(x, y, z) = xy^3 + yz^2$. Man setze sich in den Punkt $(1, -1, 1)$. In welche Richtung muss man schauen, um eine Zunahme der Funktionswerte festzustellen?

☐ **A** $1/\sqrt{3} \cdot (-1, 1, 1)$

☐ **B** $1/\sqrt{3} \cdot (-1, -1, -1)$

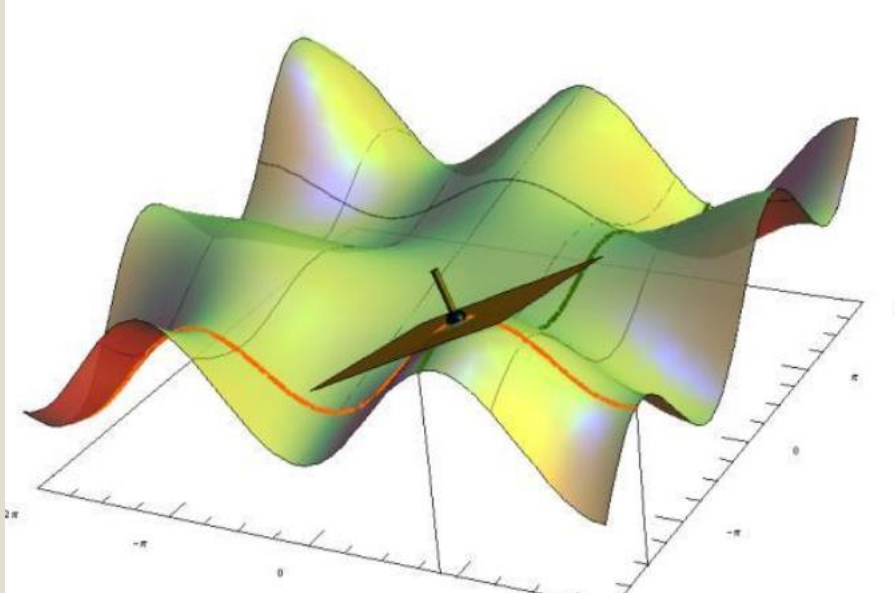
☐ **C** $1/\sqrt{3} \cdot (1, -1, -1)$

☐ **D** $1/\sqrt{3} \cdot (-1, -1, 1)$

Tangentialebene

- Die Tangentialebene T an eine Niveauläche $F(x,y,z) = C$ an der Stelle $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ist gegeben durch:

$$T: (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \text{grad } f(\vec{r}_0) = 0$$



Methode 2

1. $\text{grad}(f(x_0, y_0, z_0)) = (A, B, C)^T$ bestimmen
2. Tangentialebene: $D = Ax + By + Cz$
3. Gesuchter Punkt (x_0, y_0, z_0) einsetzen um D zu bestimmen: $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$
4. Die Tangentialebene lautet: $T(x_0, y_0, z_0) \rightarrow D = Ax + By + Cz$

Basisprüfung Sommer 2018 - SC

22. (Tangentialebene SC) Die Gleichung der Tangentialebene an das Ellipsoid $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 81$ im Punkt $(2, 1, 5)$ lautet
- (a) $2x + 4y + 6z = 38.$
 - (b) $4x + 2y + 12z = 60.$
 - (c) $4x + 4y + 30z = 162.$
 - (d) $8x + 2y + 24z = 138.$

Lineare Ersatzfunktion

Definition. Die **lineare Ersatzfunktion** $l(\vec{r})$ von f an der Stelle $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ist für die Variable $\vec{r} = (x, y, z)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} l(\vec{r}) &= f(\vec{r}_0) + f_x(\vec{r}_0) \cdot (x - x_0) + f_y(\vec{r}_0) \cdot (y - y_0) + f_z(\vec{r}_0) \cdot (z - z_0) \\ &= f(\vec{r}_0) + \text{grad } f(\vec{r}_0) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0). \end{aligned}$$