Analysis I/II

Benno Kaeslin, Jonas Lauener

31. Oktober 2017

Jonas Lauener:
Diese Zusammenfassung wurde ursprünglich von Benno Kaeslin verfasst. Ich habe sie für die Analysis I/II Vorlesung von Dr. Andreas Steiger optimiert.

Für die Vollständigkeit und Korrektheit kann ich keine Garantie geben!

Bei Fehler oder Fragen: jlauener@student.ethz.ch

Benno Kaeslin:
Diese Formelsammlung ist für den Kurs Analysis I/II D-Mavt an der ETH Zürich gemacht.
Der grösste Teil dieser Zusammenfassung ist aus meinen Notizen von der Vorlesung von Paul Biran und dem Begleitbuch Analysis I/II von U. Stammbach. Teile sind aus den Zusammenfassungen von Benjamin Simonet und Jonas Peschel zusammengetragen. Die Abschnitte über die speziellen Funktionen (inkl. Bilder) sind aus *Mathematische Formelsammlung: Für Ingenieure und Naturwissenschaftler* von Lothar Papula.
Das Layout wurde von der Mechanics II Zusammenfassung von Samuel Zimmermann & Maurin Widmer übernommen.
Ich danke André Jauch, Jan Altherr, Linard Furck, Sandro Christen und Sandro Haller für die Unterstützung.

Die Titel der einzelnen Themen enthalten zum Teil die Seiten Zahlen des Themas vom Buch *Formeln, Tabellen, Begriffe* (das gelbe Buch), welches man zur Prüfung mitnehmend darf.

Für die Vollständigkeit und Korrektheit kann ich keine Garantie geben!

Bei Fehler oder Fragen: bkaeslin@student.ethz.ch

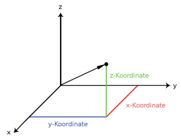
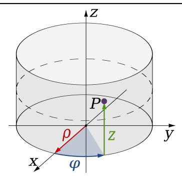
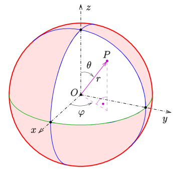
Allgemein

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\quad\sqrt{2}=1.414...$ $\quad\sqrt{3}=1.732...$

ungerade: $f(-x) = -f(x)$ z.B. $sin(x)$, $tan(x)$

gerade: $f(-x) = f(x)$ z.B. $cos(x)$

Koordinatentransformation

	kartesisch	zylindrisch	sphärisch
kartesisch		$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ $\varphi = arctan(\frac{y}{x})$ $z = z$	$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\theta = arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ $\varphi = arctan(\frac{y}{x})$
zylindrisch	$x = \rho cos\varphi$ $x = \rho sin\varphi$ $z = z$		$r = \sqrt{\rho^2+z^2}$ $\theta = arctan(\frac{\rho}{z})$ $\varphi = \varphi$
sphärisch	$x = rsin\theta cos\varphi$ $y = rsin\theta sin\varphi$ $z = rcos\theta$	$\rho = rsin\theta$ $\varphi = \varphi$ $z = rcos\theta$	

Zylinderkoordinaten

$dx = cos\varphi\cdot d\rho - \rho sin\varphi\cdot d\varphi \qquad dy = sin\varphi\cdot d\rho + \rho cos\varphi\cdot d\varphi$

$dA = \rho\cdot d\rho\cdot d\varphi \qquad dV = \rho\cdot d\rho\cdot d\varphi\cdot dz$

Sphärische Koordinaten

$dA = r^2\cdot sin\theta\cdot d\psi\cdot d\theta \qquad dV = r^2\cdot sin\theta\cdot d\psi\cdot d\theta\cdot dr$

$0 \le \theta \le \pi \qquad 0 \le \psi \le 2\pi$

Ellipsenkoordinaten $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$

$x = a\cdot rcos(\varphi) \qquad y = b\cdot rsin\varphi \qquad z = 0$

$dA = abr\ dr\ d\varphi \qquad dV = abr\ dz\ dr\ d\varphi$

Jacobi-Determinante

$dV = dxdydz = det(J)\cdot dudvdw = det\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} dudvdw$

mit $u(x,y,z); v(x,y,z); w(x,y,z)$ $\rightarrow$ zuerst nach (x,y,z) umformen oder: $det(J) = 1/det(J^{-1})$

Trigonometrie — Fota S.97-99

α	0 0°	$\pi/6$ 30°	$\pi/4$ 45°	$\pi/3$ 60°	$\pi/2$ 90°	π 180°	T	0-Stellen
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	$2\cdot\pi$	$k\cdot\pi$
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	−1	$2\cdot\pi$	$\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$
$\tan\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	0	π	$k\cdot\pi$
$\cot\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	–	π	$\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$

$cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) \qquad cosh(x) = \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$

$sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}) \qquad sinh(x) = \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$

$e^{2ix} = cos(2x)+isin(2x) \qquad e^{-2ix} = cos(2x)-isin(2x)$

$sec(x) = \frac{2cos(x)}{cos(2x)+1} \qquad -cos(x) \searrow sin(x) \searrow cos(x)$

$atan(x) \searrow \frac{1}{1+x^2} \qquad tan(x) \searrow \frac{1}{cos^2(x)} = tan^2(x)+1$

$sinh(x) \searrow\nwarrow cosh(x)$

$tanh'(x) = \frac{1}{cosh^2(x)} = 1-tanh^2(x)$

Ableitungsregeln — Fota S.63-65

Produktregel

$(f(x)\cdot g(x))' \rightarrow f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

Quotientenregel

$(\frac{f(x)}{g(x)})' \rightarrow \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Verallgemeinerte Kettenregel

$F'(t) = f_x(x(t),y(t))\cdot\dot{x}(t)+f_y(x(t),y(t))\cdot\dot{y}(t)$

Integralregeln — Fota S.70-72

Integral mit Fkt. als Grenze

$\int_a^{g(x)} f(u)\cdot du = f(g(x))\cdot g'(x)$

Partielle Integration

$\int_a^b \underset{\uparrow}{u}\cdot\underset{\downarrow}{v}\cdot dx = [udx\cdot v]_a^b - \int_a^b(udx\cdot v')dx$

Substitutionsregel

$\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\cdot dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(z)\cdot dz$,wobei z=u(x)

Vektoranalysis — Fota S.102-105

Vektorprodukt

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\cdot b_3 - a_3\cdot b_2 \\ a_3\cdot b_1 - a_1\cdot b_3 \\ a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Partialbruchzerlegung

Nullstellen des Nennerpolynoms suchen

A) einfache Nst: $\frac{A}{(x-x_0)}$

B) doppelte Nst: $\frac{A}{(x-x_0)} + \frac{B}{(x-x_0)^2}$

C) komplexe Nst: $\frac{Ax+B}{(z.B.:x^2+1)}$

Beispiel: $\frac{x}{x^3+x^2-x-1} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x-1)}$

$\Rightarrow$ mit Nenner multiplizieren, Koeffizientenvergleich

$$\begin{array}{l|r} x^0 & -A-B+C=0 \\ x^1 & -B+3C=1 \\ x^2 & A+B+3C=0 \\ x^3 & B+C=0 \end{array} \qquad \Rightarrow A=\tfrac{1}{2}, B=-\tfrac{1}{4}, C=\tfrac{1}{4}$$

Asymptoten — Fota S.66

A) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{A(x)} = \frac{0}{0}\ oder\ \frac{\infty}{\infty}$ $\Rightarrow$ Bernoulli-L'Hôpital

B) $A(x) = mx+b \quad\rightarrow\quad m = \lim_{x\to\infty}(\frac{f(x)}{x})$

$\rightarrow b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$

C) Allgemein: $\lim_{x\to\infty}(f(x)-A(x)) = 0$

1.Höchste Nennerordnung kürzen, $\lim_{x\to\infty}$ bilden

$\Rightarrow a_1 = ...$ $\rightarrow$konstante Terme fallen weg!

2.Gefundenen Term von Ursprungsfkt. abziehen

$\rightarrow$ Zähler wird um eine Ordnung kleiner

3.$\lim_{x\to\infty}$ bilden, Nennerordnung kürzen

$\Rightarrow a_2 = ...$

4.$A(x) = a-1+a_2+...$

Bernoulli-L'Hôpital — Fota S.61

Falls $\lim_{x\to\infty/a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ oder $\lim_{x\to\infty/a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

$\rightarrow$ beide Fkt. müssen gegen 0 oder ∞ gehen!

$$\lim_{x\to\infty/a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty/a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Folgen — Fota S.38-41 + S.51-54

Satz: Ist eine Folge monoton wachsend bzw. fallend **und** beschränkt, so ist sie **konvergent**
Konvergente Folge: besitzt einen Grenzwert.
Eine Folge ohne Grenzwert ist **divergent**.
Konkav: $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$
Konvex: $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$
$t \in [0, 1]$, strikt wenn $\leq$ durch $<$ ersetzt wird.

Grenzwerte — Fota S.61-62

A) Wurzel: erweitern nach 3. Binom. Formel
B) Beträge: links- und rechtss. Grenzw. separieren
C) $e^x >> x^k >> \sqrt{x} >> ln(x)$

$\lim_{x\to\infty} \frac{BLA1}{BLA2}$

A) Höchste Potenz kürzen
$\Rightarrow$ niedrigere Potenz gegen 0

B) Gehen Zähler und Nenner gegen ∞ oder 0
$\Rightarrow$ Regel von Bernoulli-L'Hôpital (evtl. mehrfach)

C) Partialbruchzerlegung
$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)} \cdot \frac{bla1}{bla2}$
$\rightarrow$ Nenner-Nst. ausklammern
$\lim_{x\to x_o} = \frac{A}{BLA1} + \frac{B}{BLA2}$

D) $\frac{1}{x}$ durch y substituieren $\rightarrow \lim_{x\to\infty} = \lim_{y\to 0}$
$\Rightarrow$ Bernoulli-L'Hôpital anwendbar

F) Sandwichsatz: Folgen a_n, b_n, c_n
mit $a_n \leq b_n \leq c_n$
$\lim_{x\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} c_n = l \rightarrow \lim_{x\to\infty} b_n = l$

Funktionen vergleichen

$f(x) = \circ(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow g$ wächst schneller als f

Wichtige Grenzwerte

$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{arctan(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{arcsin(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} = \frac{x}{sin(ax)} = \frac{1}{a}$
$\lim_{x\to 0} = \frac{sin(ax)}{sin(x)} = a$
$\lim_{x\to\infty} n \cdot sin(\frac{1}{n}) = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = ln(a)$

$\lim_{x\to 0} \frac{cos(x)-1}{x} = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{tan(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \frac{tan(x)}{x} = \mp\infty$
$\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$
$\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = e^x$
$\lim_{x\to 0} x^a \cdot ln^b(x) = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{ln(a+x)}{x} = \frac{1}{a}$
$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1$
$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$
$\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x^k} = 0$
$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$
$\lim_{x\to\infty}(\frac{n-1}{n+1})^n = \frac{1}{e^2}$
$\lim_{x\to\pm\infty} atan(x) = \pm\frac{\pi}{2}$
$\lim_{x\to 1} \frac{ln(x)}{x-1} = 1$

Ableitungen — Fota S.63-65

Ableitung der Umkehrfunktion (Inverse)

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Ableitung von Kurve in Parameterdarstellung

$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$; $y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$

Ableitung in Polarkoordinaten

$\rightarrow$ Aus $x(t)$ und $y(t)$ wird $r(\phi)$
$x(\phi) = r(\phi) \cdot cos(\phi)$; $y(\phi) = r(\phi) \cdot sin(\phi)$
$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{r}(\phi)sin(\phi)+r(\phi)cos(\phi)}{\dot{r}(\phi)cos(\phi)-r(\phi)sin(\phi)}$

Krümmung — Fota S.66-67

Parametrisierung: $k(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$

Als Funktion: $k(x) = \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\boxed{k<0 \Rightarrow \curvearrowright \quad k>0 \Rightarrow \curvearrowleft}$

Krümmungsradius: $\rho = \frac{1}{k}$

Krümmungsmittelpunkt:
$x_M(x) = x - \frac{f'(x)(1+f'^2(x))}{f''(x)}$ $x_M(t) = x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}$
$y_M(x) = f(x) + \frac{(1+f'^2(x))}{f''(x)}$ $x_M(t) = y + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}$
Evolute: $\vec{E}(t) = \vec{r}(t) + \rho(t)\vec{n_0}$
$\vec{n_0} = \frac{(-\dot{y}(t),\dot{x}(t))}{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}}$ (Funktion der Funktionsnormalen)

Polarko. in Param.dar.: $\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\varphi)cos(\varphi) \\ f(\varphi)sin(\varphi) \end{pmatrix}$

Parametrisieren nach Bogenlängen

Parametrisieren nach Bogenlänge $\Leftrightarrow$ Tangentenvektor muss in jedem Punkt der Kurve Länge 1 haben:

1. Tangentenvektor $(\dot{x}, \dot{y})$ und Länge berechnen
   $\rightarrow$ Betrag berechnen
2. Bogenlänge als Funktion $s(t) = a \cdot t$; $a = const$
3. Nach t umstellen: $t(s) = \frac{s}{a}$
4. $(x(s), y(s)) = (x(t(s)), y(t(s)))$

Tangente an Punkt $P = (x_0, y_0)$

A) Horizontale Tangente: $\Rightarrow \dot{y} = 0$
B) Vertikale Tangente: $\Rightarrow \dot{x} = 0$
C) Normalform: $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$
$\rightarrow$ Fkt mit 2 Variabeln: $m = \frac{-f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$
D) Parametrisiert: $y(t) = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} \cdot (x(t) - x(t_0))$

Tangentenvektor: $\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$
Normalvektor: $(-\dot{y}, \dot{x})$
Geradengleichung für Normalenschar:
$f_x(P)(x - x_o) + f_y(P)(y - y_p) = 0$

Enveloppe

Bedingungen:
$F(x, y, C) = 0$
$F_C(x, y, C) = 0$, part. Ableitung nach Scharparameter C

1. Gleichung nach 0 auflösen
2. nach Scharparam./Variable ableiten $(b, t, a, ...)$
3. nach Scharparameter auflösen
4. in Ursprungsgleichung einsetzen
5. nach y auflösen, vereinf. $\rightarrow$ *Enveloppenglg.* $: y = ...$

Enveloppe ohne gegebene Gleichung:
$m = \frac{y}{x} = \frac{P_{2,y}-P_{1,y}}{P_{2,x}-P_{1,x}}$ $\Rightarrow y = mx + b$
$F(x, y, a) = y - mx - b = 0$; $F_a(x, y, a) = ...$

Partielle Ableitungen

Richtunsableitung

$\rightarrow$ Änderungsgrad der Fkt. in geg. Richtung $\vec{r}$
$D_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot grad(f(x, y, z))$
Definition: $D_{u,v}f(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(h\dot{u},h\dot{v})-f(0,0)}{h}$

Satz von Schwarz

Wenn f_{xy} und f_{yx} stetig, dann gilt $f_{xy} = f_{yx}$

Tangentialebene an Niveaufläche $f(x, y, z) = c$

Suche Tangentialebene in $P(x_0, y_0)$
$\rightarrow$ entspricht Richtungsableitung in $P(x_0, y_0)$!
A) Umstellen: $z = f(x, y)$
$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
B) Über Gradienten:

$$0 = grad(f(x, y, z))\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

$grad(f) = \vec{n}$ Normalvektor auf Tangentialfläche

Satz vom Maximum

Bereich A abgeschlossen und beschränkt, f stetig auf A
$\Rightarrow \exists$ mind. eine Max/Minstelle $(x_0, y_0) \in$ A

Hesse-Matrix

$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ $\forall$ Eigenwerte > 0:
positiv definit (alle EW > 0)$\Rightarrow$ lok. Min,
negativ def (alle EW < 0) $\Rightarrow$ lok. Max,
keins $\Rightarrow$ Sattelpkt.

Laplace Operator

$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$
$\Delta f = f_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} f_\rho + \frac{1}{\rho^2} f_{\varphi\varphi} + f_{zz}$
$\Delta f = f_{rr} + \frac{2}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} cot(\theta) f_\theta + \frac{1}{r^2 sin^2(\theta)} f_{\varphi\varphi}$

Extrema auf einem Gebiet — Fota S.55+S65

1. Gebiet skizzieren
2. Kandidatensuche im Innern
    2.1 $grad(f) = (f_x, f_y) = (0,0)$
    2.2 Löse nach (x, y) auf
    2.3 überprüfe, ob Kandidat in A liegt
3. Kandidatensuche auf Randkurve
    A) Parmetrisierung:
        3.1 Parametrisiere die Randkurve K_i
        $\Rightarrow \vec{r}1 : [a_i, b_i] \to K_i$
        3.2 setze Parametrisierung in f ein
        3.3 setze Ableitung gleich Null:
        $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}_i(t)) = 0$
    B) Lagrangemultiplikatoren (für Gebiet $g(x, y, z) = C$):
        Löse Gleichungssystem: $\begin{vmatrix} grad(f) = \lambda * grad(g) \\ g(x,y,z) = C \end{vmatrix}$
4. Eckpunkte sind Kandidaten:
    4.1 Setze Ecken in $f(x, y)$ ein
5. Definitionslücken der part. Abl. sind Kandidaten
6. Vergleiche die Funktionswerte der Kandidaten

Integrale — Fota S.70-74

Hauptsatz der Integralrechnung

$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$

Leibnizsche Regel, Ableitungen von Integralen

Bedingung: $f(x, t)$ stetig im Intervall

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt = f(x, v(x)) \cdot v'(x) - f(x, u(x)) \cdot u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(x,t)dt$$

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t)dt = f(g(x)) \cdot g'(x) \to Nur\ im\ Spezialfall$$

Uneigentliche Integrale

A) Uneigentliches Integral 1. Ordnung:
  $\to$Integral bis ∞
  $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)dx$
B) Uneigentliches Integral 2. Ordnung:
  $\to$Polstellen oder Definitionslücken
  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Ansätze für Integrale

A) Substitution
B) Partielle Integration
C) Polynomdivision [Grad(Zähler) >= Grad(Nenner)]
D) Partialbruchzerlegung
E) Probieren mit Hilfe von Ableitung
F) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln(f(x)) + \mathbf{C}$
G) Wurzelintegrale:
  1) Quadratisch Ergänzen, s.d. $k(1 - u^2)$ *oder* $k(u^2 \pm 1)$
  2) Sub: $\sqrt{u^2+1} \Rightarrow u = sinh(t)$; $\sqrt{u^2-1} \Rightarrow u = cosh(t)$
  $\sqrt{1-u^2} \Rightarrow u = sin(t)$
H) Trigonometrische Identitäten
J) Wenn Fkt in einer Variable ungerade und Gebiet inselber Variable symmetrisch $\to$ Integral $= 0$

Bogenlänge — Fota S.75

- explizit: $y = f(x)$
  $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$
- Polarkoordinaten:
  $L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[r'(\varphi)^2] + [r(\varphi)]^2} d\varphi$
- parametrisierte Kurve:
  $L = \int_a^b \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 + [\dot{z}(t)]^2} dt \to 2D: \ z = 0$

Flächenberechnung — Fota S.75

$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ mit t_1 als Startpunkt und t_2 als Endpunkt
$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \dot{x}(t)dt$
Dreieck: $A = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

Sektorflächenberechnung — Fota S.75

$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ mit t_1 als Startpunkt und t_2 als Endpunkt
$A_S = \frac{1}{2} |\int_{t_1}^{t_2} (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))dt|$
In Polarkoordinaten: $A_S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\rho(\varphi))^2 d\varphi$

Volumenberechnung — Fota S.93-96

Allg. Tetraeder: (vierseitige Pyramide Faktor $\frac{1}{3}$ statt $\frac{1}{6}$)
$V = \frac{1}{6} \left| det \left[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \right] \right| = \frac{1}{6} \left[(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} \right]$

Schwerpunkt einer Kurve — Fota S.76

$x_s \int_a^b G(x)dx = \int_a^b xG(x)dx \to$ nicht nur Achsenabschnitt
$G(x)$: Höhe des Kuvenabschnitts

Schwerpunkt einer Fläche

$x_s = \frac{1}{A} \iint x dA; \quad y_s = \frac{1}{A} \iint y dA; \quad mit\ A = \iint dA$

Flächenträgheitsmoment — Fota S.76

x-Achse: $I_x = \frac{1}{3} \int_a^b (f(x))^3 dx$
y-Achse: $I_y = \int_a^b x^2 (f(x))dx$

Rotations-Oberflächen — Fota S.75

Explizite Funktion $\to$ Funktion: $y(x) = f(x)$
  $\to$ Rotation um x-Achse, sonst Grenzen anpassen
  $O = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$
Parametrisierte Funktion:
  $\to$ Funktion: $x(t) = ...$; $y(t) = ...$
  $O = 2\pi \int_{t_A}^{t_B} y(t) \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt$
Rotation einer Ellipse um x-Achse; parametrisiert
  $O = 2\pi \int z(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} dt$

Rotations-Volumen — Fota S.75

Rotation um x-Achse; explizit
  $V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)^2 dx$
Rotation um x-Achse; parametrisiert
  $V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)^2 \dot{x}(t)dt$
Rotation um y-Achse; explizit
  $V_y = \pi \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot f'(x)dx$
Rotation um y-Achse; parametrisiert
  $V_y = \pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)^2 \cdot \dot{y}(t)dt$

Substitutionen

Integral	Subst.	Bemerkungen
$f(ax+b)$	$t = ax+b$	
$f(g(x))g'(x)$	$g(x) = t$	$= \int f(t)dt$
$f(x, \sqrt{ax+b})$	$x = \frac{t^2-b}{a}$	$t \geq 0$
$f(x, \sqrt{a^2-x^2})$	$x = asin(t)$	$\sqrt{a^2-x^2} = acos(t)$
$f(x, \sqrt{a^2+x^2})$	$x = asinh(t)$	$\sqrt{a^2+x^2} = acosh(t)$
$f(x, \sqrt{x^2-a^2})$	$x = acosh(t)$	$\sqrt{x^2-a^2} = asinh(t)$
$f(sin(x), cos(x))$	$t = tan(\frac{x}{2})$	$sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ $cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$
$f(e^x, sinh, cosh)$	$t = e^x$	$sinh(x) = \frac{t^2-1}{2t}$ $cosh(x) = \frac{t^2+1}{2t}$

Integraltabelle

	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_{-\pi}^{\pi}$
sin	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	1	2	0	0	0	0
sin^2	$\frac{\pi-2}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi-2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin^3	$\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0
sin^4	$\frac{3\pi-8}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi-8}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
cos	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	0	$\sqrt{2}$	2	0
cos^2	$\frac{2+\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2+\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos^3	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{5}{3\sqrt{2}}$	$\frac{4}{3}$	0
cos^4	$\frac{8+3\pi}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{8+3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
$sin \cdot cos$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
$sin^2 \cdot cos$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0
$sin \cdot cos^2$	$\frac{4-\sqrt{2}}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0

$\int_{r*\frac{\pi}{2}}^{s*\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx = \frac{n-1}{n} \int_{r*\frac{\pi}{2}}^{s*\frac{\pi}{2}} sin^{(n-2)}(x)dx,\ n >= 2$

$\int_{r*\frac{\pi}{2}}^{s*\frac{\pi}{2}} cos^n(x)dx = \frac{n-1}{n} \int_{r*\frac{\pi}{2}}^{s*\frac{\pi}{2}} cos^{(n-2)}(x)dx,\ r, s \in \mathbb{Z}$

Wichtige Integrale — Fota S.72 - 74 + S. 65

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln|f(x)| + C$

$\int f'(x) \cdot f(x)dx = \frac{1}{2}(f^2(x)) + C$

$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C$

$\int x(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2} + C$

$\int \frac{x}{(ax+b)^n}dx = -\frac{1}{(n-2)a^2(ax+b)^{n-2}} + \frac{b}{(n-1)a^2(ax+b)^{n-1}} + C$

$\int x^2(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+3}}{(n+3)a^3} - \frac{2b(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^3} + \frac{b^2(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^3} + C$

$\int \frac{x}{x^2+a}dx = \frac{1}{2}ln|x^2+a| + C$

$\int \frac{x}{ax^2+b}dx = \frac{1}{2a}ln|ax^2+b| + C$

$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}ln|\frac{x-a}{x+a}| + C$

$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctan(\frac{x}{a}) + C$

$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}dx = -\frac{1}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + C$

$\int \frac{x}{(a^2-x^2)^n}dx = \frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} + C$

$\int \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dx = \frac{y}{x^2+y^2} + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsin(x) + C$

$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arccos(x) + C$

$\int \frac{1}{1-x^2}dx = artanh(x) = log(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}) + C, |x| < 1$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = arsinh(x) = log(x + \sqrt{x^2+1}) + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = arcosh(x) = log(x + \sqrt{x^2-1}) + C, 1 \leq x$

$\int \frac{1}{sin^2(x)}dx = -cot(x) + C$

$\int sin^3(x)dx = \frac{1}{12}(cos(3x) - 9cos(x)) + C$

$\int sin^4(x)dx = \frac{1}{32}(12x - 8sin(2x) + sin(4x)) + C$

$\int cos^3(x)dx = \frac{1}{12}(9sin(x) + sin(3x)) + C$

$\int cos^4(x)dx = \frac{1}{32}(12x + 8sin(2x) + sin(4x)) + C$

$\int sin^{\frac{3}{2}}(2x)dx = -\frac{1}{2}cos(2x) + C$

$\int cos^{\frac{3}{2}}(2x)dx = sin(x)cos(x) + C$

$\int sin(x)cos(x)dx = -\frac{1}{2}cos^2 x + C$

$\int sin^2(x)cos(x)dx = \frac{1}{3}sin^3(x) + C$

$\int sin(x)cos^2(x)dx = -\frac{1}{3}cos^3(x) + C$

$\int sin^2(x)cos^2(x)dx = \frac{1}{32}(4x - sin(4x)) + C$

$\int sin^n(ax) \cdot cos(ax)dx = \frac{sin^{n+1}(ax)}{(n+1)a} + C$

$\int sin(ax) \cdot cos^n(ax)dx = -\frac{cos^{n+1}(ax)}{(n+1)a} + C$

$\int tan(x)dx = -ln|cos(x)| + C$

$\int tan^3(x)dx = \frac{sec^2(x)}{2} + ln|cos(x)| + C$

$\int tan^4(x)dx = x + \frac{1}{3}tan(x)(sec^2(x) - 4) + C$

$\int cot(x)dx = log|sin(x)| + C$

$\int coth(x)dx = log|sinh(x)| + C$

$\int \frac{cos(ax)}{sin^n(ax)}dx = -\frac{1}{(n-1)a \cdot sin^{n-1}(ax)} + C$

$\int \frac{1}{e^x+a}dx = \frac{x - ln|a+e^x|}{a} + C$

$\int \frac{1}{x^2+x}dx = ln(x) - ln(x+1) + C$

$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{2arctan(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})}{\sqrt{4ac-b^2}} + C$

$\int x \cdot e^{ax}dx = (\frac{ax-1}{a^2}) \cdot e^{ax} + C$

$\int x^2 \cdot e^{ax}dx = (\frac{a^2x^2-2ax+2}{a^3}) \cdot e^{ax}$

$\int \frac{1}{p+q \cdot e^{ax}}dx = \frac{x}{p} - \frac{1}{ap} \cdot ln|p + q \cdot e^{ax}| + C$

$\int \frac{e^{ax}}{p+q \cdot e^{ax}}dx = \frac{1}{ap} \cdot ln|p + q \cdot e^{ax}|$

$\int e^{ax} \cdot sin(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a \cdot sin(bx) + b \cdot cos(bx)] + C$

$\int e^{ax} \cdot cos(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a \cdot cos(bx) + b \cdot sin(bx)] + C$

$\int x \cdot e^{x^2}dx = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + C$

$\int \frac{(ln(x))^n}{x}dx = \frac{(ln(x))^{n+1}}{x+1} + C \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$

Parametrisierungen

1-dimensionale Objekte im $\mathbb{R}^2$ — Fota S.109

- **Kreis** mit Radius r und Mittelpkt. (x_0, y_0) :

$$K = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 | (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\}$$
$$\vec{c}(t) = (x_0 + rcos(t), y_0 + rsin(t))^T, t \in]0, 2\pi]$$

- **Ellipse** mit Halbachsen a, b und Mittelpkt. (x_0, y_0) :

$$E = \{(x,y)_T \in \mathbb{R}^2 | \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\}$$
$$\vec{c}(t) = (x_0 + acos(t), y_0 + bsin(t))^T, t \in]0, 2\pi]$$

- **Hyperbel** mit Halbachsen a, b :

$$E = \{(x,y)_T \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$
$$\vec{c}(t) = (\pm acosh(t), bsinh(t))^T, t \in \mathbb{R}$$

- **Gerade** von Punkte $\vec{p_1}$ zu $\vec{p_2}$ mit Steigung m und Achschenabschnitt n :

$$G = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 | y = mx + n\}$$
$$\vec{c}(t) = \vec{p_1} + t(\vec{p_2} - \vec{p_1}), t \in [0, 1]$$

- **Graph einer Funktion** $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$G = \{(x,y)^T \in I \times \mathbb{R} | f(x) = y\}$$
$$\vec{c}(t) = (t, f(t))^T,\ t \in I$$

- **Funktion in Polarkoordinaten**
$\vec{r}(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} \rho\cdot cos(\varphi) \\ \rho\cdot sin(\varphi) \\ f(\rho,\varphi)\end{pmatrix}$; Nur 2D: $\vec{r}(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} \rho\cdot cos(\varphi) \\ \rho\cdot sin(\varphi)\end{pmatrix}$

2-dimenionale Objekte im $\mathbb{R}^3$ Fota S.106,107,109

- **Kugel** mit Radius R und Mittelpkt. (x_0,y_0,z_0) :
$K = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 | (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2\}$
$\vec{c}(r,\varphi,\theta) =$
$(x_0 + rsin(\theta)cos(\varphi), y_0 + rsin(\theta)sin(\varphi), z_0 + rcos(\theta))^T,$
$r\in[0,R],\ \varphi\in]0,2\pi],\ \theta\in[0,\pi]$

- Nach unten geöffneter **Kegel** auf der xy-Ebene mit Spitz in $(0,0,z_0)$ und Radius der Grundfläche R:
$K = \{(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3 | z = z_0 + \frac{-z_0}{R}\sqrt{x^2+y^2}, z\geq 0\}$
$\vec{c}(r,\varphi) = (rcos(\varphi), rsin(\varphi), -\frac{z_0}{R}r + z_0)^T$
$r\in[0,R],\ \varphi\in]0,2\pi]$

- **Zylinder** mit Radius R, Höhe H und Mittelpkt. der Grundfläche (x_0,y_0) auf der xy-Ebene:
$Z = \{(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3 | (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2, 0\leq z\leq H\}$
$\vec{c}(h,\varphi) = (x_0 + rcos(\varphi), y_0 + rsin(\varphi), h)^T$
$\varphi\in]0,2\pi],\ h\in[0,H]$

- **Paraboloid** (um z-Achse gedrehte Normalparabel) der Höhe R^2:
$P = \{(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2 = z\}$
$\vec{c}(r,\varphi) = (rcos(\varphi), rsin(\varphi), r^2)^T, \varphi\in]0,2\pi], r\in[0,R]$

- **Torus, Donut** mit Radien R und r um Ursprung:
$\vec{c}(\varphi,\psi) = ((R + r\sin\psi)\cos\varphi, (R + r\sin\psi)\sin\varphi, r\cos\psi)$
$\varphi\in[0,2\pi], \psi\in[0,2\pi]$

- **Ebene**, die die Punkte $\vec{p_1},\vec{p_2}$ und $\vec{p_3}$ enthält, mit Normale $\vec{n}$ und Abstand d vom Ursprung:
$E = \{(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3 | n_1x + n_2y + n_3z = d\}$
$\vec{c}(\lambda,\mu) = (\vec{p_1} + \lambda(\vec{p_2}-\vec{p_1}) + \mu(\vec{p_3}-\vec{p_1})), \lambda,\ \mu\in\mathbb{R}^2$
$(\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n} = 0$

- **Graph** der Funktion $f; D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$:
$G = \{(x,y,z)^T\in D\times\mathbb{R} | f(x,y) = z\}$
$\vec{c}(x,y) = (x,y,f(x,y))^T, (x,y)^T\in D$

- **Fläche**, die durch Rotation der Funktion $g(x) = y$ um die x-Achse entsteht:
$G = \{(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3 | y^2+z^2 = (g(x))^2\}$
$\vec{c}(x,\varphi) = (x, g(x)cos(\varphi), g(x)sin(\varphi))^T, x\in\mathbb{R}, \varphi\in]0,2\pi]$

Mehrfachintegrale

Oberflächen Berechnen

A) Gekrümmte Fläche in 3D? $\to$ **A.1**
B) Ebene Fläche als $f(x,y)$? $\to$ **B.1**
C) Fläche von polarer Funktion $r(\varphi)$? $\to$ **C.1**
D) Parametrisierte 2D-Fläche $x(t), y(t)$? $\to$ **D.1**
E) Abhängigkeit von ρ und $\varphi\to$ **E.1**

A.1 Parametrisieren: $S : \vec{r} = f(u,v)$
$\to u$ und v sollen Kurve am Rand folgen
$\Rightarrow O(S) = \iint_S |\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)| dudv$
$\to$ Achtung: nur Betrag, ignoriere Jacobi-Det.!

B.1 $O = \iint_S \sqrt{f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)+1}dy\,dx$

C.1 $O = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi$

D.1 $O = \int_{t_0}^{t_1} y(t)\cdot\dot{x}(t)dt$

E.1 $O = \int_0^{\varphi}\int_0^{f(\varphi)} \rho d\rho d\varphi$

Oberflächenelement

$dA = |\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)| du\,dv$

Flächenträgheitsmomente [I]=[m^4]

Stab/Querschnitt in z-Richtung ausgerichtet.
A)Kartesische Koordinaten:
$I_x = \int_a^b\int_{f_u(x)}^{f_o(x)} y^2dy\,dx \to$ axiales Trägheitsmoment um x
$I_y = \iint x^2dy\,dx = \int y(x)x^2dx \to$ ax. Trägheitsm. um y
$I_z = I_x + I_y = \iint(x^2+y^2)dy\,dx \to$ polares Tr.-M.
B) Polar Koordinaten:
$I_x = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r^3 sin^2(\varphi)dr\,d\varphi$
$I_y = \iint r^3cos^2\varphi\ dr\,d\varphi$
$I_z = \iint r^3 dr\,d\varphi \to$ polares Trägheitsmoment genannt

Massenträgheitsmomente; Fota S.162; [J]=[$kg\cdot m^2$]

$\to$Immer um Schwerpunkt, sonst Satz von Steiner!
Kartesisch, um z-Achse
$J_z = \iiint_V \rho\cdot(x^2+y^2)dz\,dy\,dx$
Polarkoordinaten, um z-Achse
$J_z = \iiint_V \rho\cdot r^3\ dz\,dr\,d\varphi$
Rotierende Fkt. $f(x)$ explizit, Rot. um x-Achse
$J_x = \frac{1}{2}\pi\cdot\int\rho\cdot f(x)^4dx$
Rotierende Fkt. $f(x(t), y(t))$ param., Rot. um x-Achse
$J = \frac{1}{2}\pi\cdot\int_{t_0}^{t_1}\rho\cdot y^4(t)|\dot{x}(t)|dt$
Um allg. zur x-Achse parallelen Achse durch Punkt (0,a,b)
$J_x = \iiint_V \rho\cdot((y-a)^2+(z-b)^2)dx\,dy\,dz$

Satz von Steiner

Flächen: $I = I_0 + A\cdot t^2 \to$ mit t als Abstand zur Achse
Massen: $J = J_0 + m\cdot d^2 \to$ mit d als Abstand von Rot.-Achse

Schwerpunkt

Schwerpunkt für x-Achse. y- und z-Achse analog.
A) Körper $\to$ **A.1**
B) Fläche $\to$ **B.1**
C) Homogener Rotationskörper $\to$ **C.1**

A.1 Körper homogen?
A) Ja (ρ konst. oder nicht gegeben)
$\Rightarrow V = \iiint 1dV$
$x_s = \frac{1}{V}\iiint x\ dx\ dy\ dz$
B) Nein ($\rho = \rho(x,y,z)$)
$\Rightarrow m = \iiint\rho(x,y,z)dV$
$x_s = \frac{1}{m}\iiint\rho(x,y,z)\cdot x\ dx\ dy\ dz$

B.1 Fläche homogen?
A) Ja (δ konst oder nicht gegeben)
$\Rightarrow A = \iint 1dA\to$ (FoTa S.75)
$x_s = \frac{1}{A}\iint x\ dx\ dy$
B) Nein ($\delta = \delta(x,y)$)
$\Rightarrow M = \iint\delta(x,y)dA$
$x_s = \frac{1}{M}\iint\delta(x,y)\cdot x\ dx\ dy$

C.1 Rotationskörper
$\Rightarrow x_s = y_s = 0$
$V = \iiint 1dV$; $V_x = \pi\int_a^b(f(x))^2dx\to$ (FoTa S.75)
$z_s = \frac{1}{V}\iiint z\cdot r\ dr\ d\varphi\ dz$

Sonst $\Rightarrow$ Symmetrien betrachten $\Rightarrow y_s = 0?, z_s = 0?$
Halbkugelschale: $z_s = \frac{3}{8}\frac{R^4-r^4}{R^3-r^3}$ Halbkugel: $\frac{4R}{3\pi}$
Achtelkugel: $x_s = y_s = z_s = \frac{3}{8}R$ Kegel: $z_s = \frac{1}{4}h$

Masse mit gegebener Massendichte

Die Massendichte $\rho(x,y,z)$ über das Volumen Integrieren:
$M = \iiint_V\rho(x,y,z)dV$

Arbeit $A = \int_W \vec{v} \cdot d\vec{r}$

1. $rot(\vec{v})$ berechnen
2. Weg geschlossen? Ja → **2.1** Nein → **2.2**

2.1 $rot(\vec{v}) \cdot \vec{n}$ berechnen → nur benötigte Elemente von $rot\vec{v}$ berechnen
$\vec{v}$ auf ganzer umschlossener Fläche definiert? Ja → **Stokes**
Nein → **2.2**

2.2 Ist $rot(\vec{v}) = (0, 0, 0)$?
A) Nein:
1. Weg parametrisieren → $\vec{r}(t)$ ⇒ $\dot{\vec{r}}(t)$ ausrechnen
2. $\vec{r}(t)$ in $\vec{v}$ einsetzen → $\vec{v}(\vec{r}(t))$
3. $A = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)) dt$

B) Ja: ⇒ $\vec{v}$ ist ein Potenzialfeld (konservativ)

Vektorfeld einfach zusammenhängend? (für jede geschl. Kurve gibt es irgendeine Fläche nicht durch Def.lücke gehend und Kurve als Rand) Ja → weiter, Nein → 2.2 A)

Es gibt ein Potenzial $f(x, y, z)$, sodass $grad(f) = \vec{v}$
1. $v_1 = f_x \Rightarrow \int v_1 dx + \alpha(y, z)$
   $v_2 = f_y \Rightarrow \int v_2 dy + \beta(x, z)$
   $v_3 = f_z \Rightarrow \int v_3 dz + \gamma(x, y)$
2. Zusammensetzen: $f(x, y, z) = ... + C$
3. Anfangs- und Endpunkt einsetzen:
   $A = f(P_2) - f(P_1)$

Satz von Stokes

$A = \iint\limits_S rot(\vec{v}) \cdot \vec{n_0}\ dO \rightarrow (\vec{n}\ normiert!!!)$

Fluss $[\phi]=[m^3/s]$

1. $div(\vec{v})$ berechnen ⇒ $div(\vec{v})$ = konst oder einfach?

(Bsp. z, $x^2 + y^2$ etc.) ⇒ Satz von Gauss

A) **Satz von Gauss:**
Bed.: $div(\vec{v})$ in ganz V definiert
Fluss durch die gesamte Oberfläche des Körpers von innen nach aussen:
$\Phi = \iiint\limits_V div(\vec{v}) dV$ → evtl. geschlossene Teilflächen abziehen.

B) **Parametrisieren** → $\vec{r}(\rho, \varphi)$ oder $\vec{r}(\varphi, \theta)$
$\Phi = \iint\limits_O \vec{v} \cdot (\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v))\ du\ dv$ → $(dO = d\varphi d\rho)$
→ Richtung beachten! ⇒ $x = 0$ einsetzen ⇒ Vorzeichen

C) **Allgemeine Formel** (verw. falls $\vec{n}$ einfach, konst)
$\Phi = \iint\limits_O \vec{v} \cdot \vec{n_0}\ dO$ → evtl. mehrere Teilflächen
→ Richtung von $\vec{n}$ beachten! → Vorzeichen

Differentialoperatoren

$grad(f)$
$= \nabla f(x, y, z) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z))$

$div(\vec{v}) = (\frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x, y, z))$

$$rot(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y \cdot v_3 - \partial_z \cdot v_2 \\ \partial_z \cdot v_1 - \partial_x \cdot v_3 \\ \partial_x \cdot v_2 - \partial_y \cdot v_1 \end{pmatrix}$$

Zusammensetzungen von Differentialoperatoren

$div(grad(f)) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f$ → Laplace-Operator
$rot(grad(f)) \equiv (0, 0, 0)$
$div(rot(\vec{v})) \equiv 0$
$div(f \cdot rot(\vec{v}) = grad(f) \cdot rot(\vec{v})$
$rot(rot(\vec{v})) = grad(div(\vec{v})) - (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3)$
$div = 0$ ⇒ Quellfrei, $rot = 0$ ⇒ Wirbelfrei.
$div = rot = 0$ ⇒ Harmonisch

Differentialgleichungen Fota S.81-82

lineare homogene DGL 1.Ordnung

Form: $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})$
simpel: $y'(x) = f(x) \rightarrow y(x) = [\int f(x) dx] + C$
separiebar: $y'(x) = \frac{f(x)}{h(y)} \rightarrow \int h(y) dy = [\int f(x) dx] + C$

$y' = p(x) \cdot y$ (immer separierbar):
1. Substitution $y' = \frac{dy}{dx}$
2. Separieren → $\frac{1}{y} \cdot dy = p(x) \cdot dx$
3. Integrieren → $\int \frac{1}{y} dy = [\int p(x) dx] + \mathbf{C}$

Substitutionen: → Achtung Rücksubstitution!

A) $y'(x) = f(ax + by(x) + c)$: $Sub : u(x) = ax + by(x) + c$
⇒ $u'(x) = a + b \cdot f(u)$

B) $y'(x) = f(\frac{y}{x})$: $Sub : u(x) = \frac{y}{x}$
→ $y = u(x) \cdot x$
⇒ $y'(x) = u(x) + x \cdot u'(x)$

C) $y'(x) = (y(x) + f(x))^2$: $Sub : u(x) = y(x) + f(x)$
⇒ $y'(x) = u'(x) - f'(x); y(x) = u(x) - f(x)$

Tipp: DGL-Form: $u' \cdot y + u \cdot y' = (uy)'$ → Integral

lineare inhomogene DGL 1.Ordnung

$y' = p(x) \cdot y + q(x)$
1. Lösen der homogenen DGL wie oben
   ⇒ $y_h = y' + ay = 0$
2. Finde partikuläre Lösung mit:
   A) Ansatz von Tabelle → **3.1**
   B) Ansatz von Lagrange → **4.1**

3.1 Ansatz ableiten → y'
3.2 y und y' in Anfangsgleichung einsetzen
3.3 Konstanten bestimmen → **5.**

Störfunktion	Ansatz für $\mathbf{y_p}$
Konstante	$\mathbf{y_p = A}$
lin. Fkt.	$\mathbf{y_p = Ax + B}$
quadr. Fkt.	$\mathbf{y_p = Ax^2 + Bx + C}$
Polynom n-Grades	$\mathbf{y_p = A + Bx + Cx^2 + ... + Zx^n}$
$Asin(\omega x)$ $Bcos(\omega x)$ $Csin(\omega x) + Dcos(\omega x)$	$\mathbf{y_p = Csin(\omega x) + Dcos(\omega x)}$
$A \cdot e^{bx}$	$\mathbf{y_p = C \cdot e^{bx}}$ oder falls $b = -a$: $\mathbf{y_p = Cx \cdot e^{bx}}$

Ansatz von Lagrange

4.1 Homogene Lösung finden: $y(x) = C \cdot ...$
4.2 Konstante C als veränderliche Fkt.:
$C = C(x) \Rightarrow y(x) = C(x) \cdot ...$
4.3 Ableiten: $y'(x) = C'(x) \cdot ...$ → Produktregel!
4.4 Einsetzen in die inhomogene DGL → nur noch C' vorkommmen, kein C
4.5 Lösen nach $C(x)$ → meist partielle Integration (Integrationskonst. nicht vergessen!)
4.6. Lösung für $C(x)$ in Lösung von y_h einsetzen → **5.**
5. $y = y_h + y_p$ → Randbedingungen

Exakte DGL

Beschreiben Niveaulinien einer Funktion
$G_y(x, y) \cdot y' + G_x(x, y) = 0$
Bedingung:
- $(G_y)_x(x, y) = (G_x)_y(x, y) \forall (x, y) \in$ Def. Bereich
- Def. Bereich muss einfach zusammenh. sein.

Lösung G(x,y) = C:
$\int G_x(x, y) dx + \alpha(y) = \int G_y(x, y) dy + \beta(x) = G(x, y)$
→ $\alpha(y)$ und $\beta(x)$ durch Koeff.vergl. finden
$G(x, y) + C = 0$ → nach y lösen ⇒ y_h

Orthogonaltrajektorien (OT)

Stehen in jedem Punkt senkrecht zur Funktion
Schar von OT = Phasenportrait

1. Schar nach C umformen und y = y(x) setzen
2. Geg. Kurvenschar nach x ableiten (C verschwindet) und nach y' auflösen
3. $y'_{OT} = -\frac{1}{y'}$ setzen (y durch y_{OT} ersetzen)
4. Nach y'_{OT} umformen und neue DGL lösen

Bsp:

$y = Cx^2 \xrightarrow{(1.)} C = \frac{y}{x^2}x$

$\xrightarrow{(2.)} 0 = \frac{y'x^2 - 2xy}{x^4} \Rightarrow y' = \frac{2y}{x}$

$\xrightarrow{(3.)} y'_{OT} = -\frac{x}{2y_{OT}}$

$\xrightarrow{(4.)} \int y_{OT}dy = -\int \frac{1}{2}xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = C$

Feldlinien

Feldlinien eines Vektorfeldes $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow y' = \frac{v_2}{v_1}$

Lösung der DGL ergeben die Feldlinien

Inhomogene DGL 2.Ordnung

$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = g(x)$

1. Lösen der homogenen DGL wie oben
2. Finde partikuläre Lösung mit:
   A) Ansatz von Tabelle → **3.1**
   B) Ansatz von Lagrange → **4.1**

3.1 Ansatz ableiten → y', y''
3.2 y, y' und y'' in Anfangsgleichung einsetzen
3.3 Konstanten bestimmen → **5.**
5. $y = y_h + y_p$ → Randbedingungen

Ansatz von Lagrange für DGL 2.Ordnung

4.1 Homogene Lösung finden: $y(x) = C \cdot ...$
4.2 Konstante C_1, C_2 als veränderliche Fkt.:
$C_1 = C_1(x),\ C_2 = C_2(x)$
4.3 DGL $\Rightarrow y(x) = C_1(x)u(x) + C_2(x)v(x)$
4.4 Wir treffen folgende Annahme:
$C_1'u + C_2'v = 0$
$C_1'u' + C_2'v' = g(x)$
4.5 $y' = C_1u' + C_2v'$
$y'' = C_1'u' + C_1u'' + C_2'v' + C_2v''$
4.6 Löse für C_1' und C_2' :
$C_1' = \frac{g(x)\cdot v}{u'v - uv'} \qquad C_2' = -\frac{g(x)\cdot u}{u'v - uv'}$

4.7 C_1 und C_2 durch Integration finden (Integrationskonstante nicht vergessen!) → C_1, C_2 einsetzen

Störfunktion	Ansatz für y_p
Polynom n-Grades	$b \neq 0 \quad \mathbf{y_p = Q_n(x)}$ $a \neq 0; b = 0 \quad \mathbf{y_p = xQ_n(x)}$ $a = 0; b = 0 \quad \mathbf{y_p = x^2Q_n(x)}$
e^{cx}	c ist keine Lsg. $\quad \mathbf{y_p = Ae^{cx}}$ c ist einfache Lsg. $\quad \mathbf{y_p = Axe^{cx}}$ c ist doppelte Lsg. $\quad \mathbf{y_p = Ax^2e^{cx}}$
$Asin(\omega x)$ $Bcos(\omega x)$ lin-Komb.	$i\omega$ ist keine Lsg. des char. Poly.: $\mathbf{y_p = Csin(\omega x) + Dcos(\omega x)}$ $i\omega$ ist eine Lsg. des char. Poly.: $\mathbf{y_p = x(Csin(\omega x) + Dcos(\omega x))}$
$\frac{1}{x^2}$	$\mathbf{y_p = A \cdot ln\|x\|}$
Summe von Störfkt.	$\mathbf{y_p = y_{p1} + y_{p2}} + ...$
Produkt von Störfkt.	$\mathbf{y_p = y_{p1} \cdot y_{p2}} \cdot ...$ → ! Funktioniert nicht immer !

DGL n-ter Ordnung

$y'' + a_1y' + a_0y = 0 \Rightarrow$ char. Polynom: $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$

1. Kommen nur Ableitungen von y vor?
   1.1 Substituiere y' mit $u \Rightarrow$ Grad der DGL $= n - 1$
2. Setze $y = e^{\lambda x}$
3. Finde charakteristisches Polynom für y_h:
   $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$
   A) Alle Lsg. sind reell und $\lambda_1 \neq \lambda_2 + ...$
   $\Rightarrow y_1 = C_1e^{\lambda_1 x};\ y_2 = C_2e^{\lambda_2 x}; ...$
   $\Rightarrow y(x) = y_1 + y_2 + ... = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + ...$
   B) $\lambda = \alpha$ ist eine r-fache Lsg. des char. Poly.: $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_r = \alpha$
   $\Rightarrow y_1 = e^{\alpha x}; y_2 = xe^{\alpha x}; ...; y_1 = x^{r-1}e^{\alpha x}$
   $\Rightarrow y(x) = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + ... + C_rx^{r-1})e^{\alpha x}$
   C) $\lambda_{1,2} = a \pm i\omega$ eine einfach konj. komplexe Lsg.:
   $\Rightarrow y_1 = e^{ax}sin(\omega x); y_2 = e^{ax}cos(\omega x)$
   $\Rightarrow y(x) = e^{ax}(C_1sin(\omega x) + C_2cos(\omega x))$
   D) r-fache konj. komplexe Lsg.:
   $\Rightarrow$ Ersetze Konstanten C_1 und C_2 durch $C_1(x)$ und $C_2(x)$ vom Grad r
   $\Rightarrow y(x) = e^{ax}(C_1(x)sin(\omega x) + C_2(x)cos(\omega x))$
4. Finde partikuläre Lösung mit Tabelle (∄ Lagrange)
   4.1 Ansatz ableiten → $y', y'', ..., y^{(n)}$
   4.2 $y', y'', ..., y^{(n)}$ in Anfangsgleichung einsetzen
   4.3 Konstanten bestimmen
5. $y = y_h + y_p$ → Randbedingungen

Tipp: Char. Poly.: $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$
→mit $(\lambda - 1)$ multiplizieren (Fota S.18)
$\Rightarrow$ ergibt zusätz. Nullst. für $\lambda = 1$ → **De Moivre**

Störfunktion	Ansatz für y_p
Polynom n-Grades	$\mathbf{y_p = A + Bx + Cx^2} + ...$
$m \cdot e^{cx}$	c ist keine Lsg. $\quad \mathbf{y_p = Ae^{cx}}$ c ist einfache Lsg. $\quad \mathbf{y_p = Axe^{cx}}$ c ist r-fache Lsg. $\quad \mathbf{y_p = Ax^re^{cx}}$
$Asin(\omega x)$ $Bcos(\omega x)$ lin-Komb.	$i\omega$ ist keine Lsg. des char. Poly.: $\mathbf{y_p = Csin(\omega x) + Dcos(\omega x)}$ $i\omega$ ist eine Lsg. des char. Poly.: $\mathbf{y_p = x(Csin(\omega x) + Dcos(\omega x))}$
Summe von Störfkt.	$\mathbf{y_p = y_{p1} + y_{p2}} + ...$
Produkt von Störfkt.	$\mathbf{y_p = y_{p1} \cdot y_{p2}} \cdot ...$ → ! Funktioniert nicht immer !

Eulersche DGL n-ter Ordnung

$... + a_3x^3y''' + a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = g(x)$

Ansatz: $y_h = x^\alpha, y_h' = \alpha x^{\alpha-1}, y_h'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, ...$

Indexpolynom:

$... + a_3\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + a_2\alpha(\alpha-1) + a_1\alpha + a_0 = 0$

1. Indexpolynom aufstellen und lösen
2. Lösungen:
   A) $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq ...$ (reel)
   $\Rightarrow y = C_1x^{\alpha_1} + C_2x^{\alpha_2} + C_3x^{\alpha_3} + ...$
   B) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha$ (reel)
   $\Rightarrow y = C_1x^\alpha + C_2(ln(x))x^\alpha + C_3(ln(x))^2x^\alpha + ...$
   C) $\alpha_{1,2} = \alpha_{3,4} = a \pm bi$
   $\Rightarrow y = x^a(C_1cos(b*ln(x)) + C_2sin(b*ln(x))) + ln(x)[x^a(C_3cos(b*ln(x)) + C_4sin(b*ln(x)))]$

DGL Systeme

$f_1, f_2, ..., f_n$ von t unabhängig $\Rightarrow$ autonom

DGL System: $\begin{bmatrix}\dot{x}(t) = f_1(x,y)\\ \dot{y}(t) = f_2(x,y)\end{bmatrix}$

Lineares System:

$$\left.\begin{array}{r|l}(I) & \dot{x}(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + b1\\ (II) & \dot{y}(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + b2\end{array}\right| \rightarrow A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{\dot{z}} = A \cdot \vec{z} + \vec{b},\ \vec{z} = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$

- Störterm $\vec{b} = 0 \rightarrow$ System homogen
- Ordnung System $= \sum$ Ordnung Gleichungen
- DGL abhängig voneinander $\rightarrow$ gekoppelt, sonst entkoppelt

Überführen in System höherer Ordnung:
immer möglich, auch mit Störterm aus n DGLs 1.Ordung
$\Rightarrow$ 1. DGL n-ter Ordnung
1. (I) Gleichung nach Variabel x oder y auflösen, ableiten $\rightarrow \dot{x} = ...$ bzw. $\dot{y} = ...$
2. in (II) Gleichung einsetzen $\rightarrow$ DGL lösen (wenn möglich Anfangsbed. einsetzen)
3. Lösung und deren Ableitungen in (I) einsetzen

LinAlg Methode (nur wenn A diagonalisierbar):
1. Finde EW (λ_i) und EV ($\vec{v_i}$) von A
2. Lösung $\vec{z}(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$
   A) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq ...$ (reel) $\Rightarrow \vec{z}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v_2} + ...$
   B) $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda$ (reel) $\Rightarrow \vec{z}(t) = C_1 e^{\lambda t}\vec{v_1} + C_2 e^{\lambda t}\vec{v_2} ...$
   C) $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ (konj. komplex)
   $\Rightarrow \vec{z}(t) = C_1 Re(e^{\lambda_1 t}\vec{v_1}) + C_2 Im(e^{\lambda_1 t}\vec{v_1})$
   $= e^{at}(C_1 e^{at}\begin{pmatrix}v_{1,1}cos(bt)\\ -v_{1,2}sin(bt)\end{pmatrix} + C_2 e^{at}\begin{pmatrix}v_{1,1}sin(bt)\\ v_{1,2}cos(bt)\end{pmatrix}$

Gleichgewichtspunkte / Phasenporträt

Gleichgewichtspunkte:
Dort wo $\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \rightarrow$ keine Änderung in x und y

Phasenportrait:
$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)} \rightarrow$ DGL $y' = ...$ lösen, Schar skizzieren, Durchlaufsinn einzeichnen

Durchlaufsinn:
Richtung, welche sich mit steigendem t die Kurve bewegt:
$\dot{x} > 0 \rightarrow$ immer $\frown$ (positive Steigung)
$\dot{y} < 0 \rightarrow$ immer $\frown$ (negative Steigung)

Nicht lineare Systeme müssen linearisiert werden!
Für Durchlaufsinn:
Falls $\dot{x} < 0$ und $\dot{y} > 0 \rightarrow$ Intuition oder einfach probieren

Potenzreihenansatz für DGL

1. Ansatz für die Lösung: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$
2. Ableitungen von Ansatz bilden:
   $y' = a_1 + 2a_2 x + ...,\ y'' = 6a_2 + ...$ usw.
3. in DGL einsetzen
   $\rightarrow$ Koeffizientenvergleich $\rightarrow a_0, a_1, a_2, ...$ bestimmen

Potenzreihen Fota S.79

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \rightarrow$ Entwicklungspkt. x_0; Koeff. a_n
Konvergenzradius: $r = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$
$\forall x\ mit\ |x - x_0| < r \rightarrow konv.,\ \forall x\ mit\ |x - x_0| > r \rightarrow div.$

Finde **Taylorreihe**
$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$
Integral? $\Rightarrow$ 1.Ableitung: $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

Finde **erste k Koeffizienten** der Potenzreihenentw.
A) Terme höher als x^k streichen
B) Integral: $\Rightarrow$ Terme höher x^{k-1} streichen
C) Quadrat? Ausrechnen, zu hohe Terme streichen

Finde **komplette** Potenzreihenentw. um $x_0 = a$
A) Taylorentwicklung: Ableiten, einsetzen,...
B) Funktion in bekannte Reihe umformen
C) Ableitung/Integral als Reihe darstellbar?
D) Partialbruchzerlegung
E) Funktion als Summe/Produkt bekannter Reihen
   Funktion $= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow$ Koef.-Vergleich
F) Funktion ungerade? $\rightarrow a_0, a_2, a_4, ... = 0$
G) Bruch? $\Rightarrow$ Nenner auf linke Seite, Koeff.-Vergl.

Bsp: $ln(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - 1)^k$ bei $x_0 = 1$
1. Ersetze x durch x_0, schreibe Summe aus
   $ln(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - 1)^1 + a_2(x_0 - 1)^2 + ...$
2. Setze x_0 ein, finde a_0
   $0 = a_0 \cdot 1 + 0 + ... + 0 \Rightarrow a_0 = 0$
3. Leite **beide** Seiten ab
   $\frac{1}{x_0} = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2(x_0 - 1) + a_3 \cdot 3(x_0 - 1)^2 + ...$
4. Setze x_0 ein , finde a_1
   $\frac{1}{1} = a_1 + 0 + ... \Rightarrow a_1 = 1$
5. Leite weiter ab, finde mehrere a_n
   $a_0 = 0;\ a_1 = 1;\ a_2 = -\frac{1}{2};\ a_3 = \frac{1}{3}; ...$
6. Finde Bildungsschema der a_n
   $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k};\ k \geq 1$
   $\rightarrow$ Achtung: Teillösung nicht vergessen: $a_0 = 0$

Potenzreihenentwicklung

Alle Reihen um $-1 < x < 1$ oder $-|a| < x < |a|$
Geometrische Reihe: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$
$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$
$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + ...$
$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ...$
$\frac{1}{a-x} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{a})^n = \frac{1}{a}(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + ...)$
Integrale/Ableitungen der geom. Reihe:
$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n + 1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + ...$
$\frac{1}{(x-a)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{a})^{n+2}(n + 1)x^n = \frac{1}{a^2} + \frac{2x}{a^3} + \frac{3x^2}{a^4} + \frac{4x^3}{a^5} ...$
$ln(1 - x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...)$
$ln(1 + x) = \int_1^x \frac{1}{1+t}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp ...$
$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}x^n((1+n)(2+n)) = 1+3x+6x^2+10x^3+...$
$\frac{1}{(1+x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}x^n(-1)^n(1 + n)(2 + n) = 1 - 3x + 6x^2 \mp ...$
Binomische Reihe:
$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n + 1)x^2 = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 \pm ...$
$\sqrt{1 + x} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ n\end{pmatrix} x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 \pm$
$\sqrt{1 - x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - ...$
Weitere Reihen($x \in \mathbb{R}$):
$e^{cx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cx)^n}{n!} = 1 + (cx) + \frac{(cx)^2}{2!} + \frac{(cx)^3}{3!} + ...$
$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp ...$
$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp ...$
$sin^2(x) = \frac{2^1}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 \mp ...$
$cos^2(x) = 1 - \frac{2^1}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 \pm ...$
$sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ...$
$cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + ...$
$ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x - 1)^n = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 \pm ...$
$\rightarrow 0 < x \leq 2$
Vereinfachungen:
$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3+(x-1)} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{(x-1)}{3}} = \frac{1}{3}(1 - (\frac{x-1}{3})1(\frac{x-1}{3})^2 + ...)$
$\frac{1}{(x-3)^2} = \frac{d}{dx}\frac{-1}{x-3} = \frac{d}{dx}\frac{1}{3-x}$
$ln(x) = ln(x + 1 - 1) = ln(1 + (x - 1))$
$e^x = e \cdot e^{x-1}$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)^{2n}dx = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot(2n-2)\cdot 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)^{2n}dx = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot(2n-2)\cdot 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$
$(a^5 - b^5) = (a - b)(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4)$
$a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = (a + 1)(a^4 + a^2 + 1) = (a + 1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$

Komplexe Zahlen ($z = a \pm ib$) Fota S.18-19

$e^{i\pi} = -1$

$(x-(a+ib))(x-(a-ib)) = x^2 - 2ax + (a^2+b^2)$

$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}; \quad \varphi = \begin{cases} arctan(b/a) & [a>0] \\ arctan(b/a)+\pi & [a<0] \end{cases}$

Potenzieren (Nur in Trig./Exp.-Form sinnvoll)

$z^n = r \cdot cis(\varphi)^n = r^n \cdot cis(n \cdot \varphi)$

Wurzel ziehen

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} \cdot cis(\frac{\varphi+2k\pi}{n})$;

$k = \{0,1,...,n-1\} \to$ bilden ein regelmässiges n-Eck

Natürlicher Logarithmus

$ln(z)$ ist unendlich vieldeutig

Hauptwert: $ln(z) = ln(r) + i\varphi$

Allgemein: $ln(z) = ln(r) + i(\varphi + 2k\pi) k \in \mathbb{Z}$

Graphen Transformation Fota S. 55

Inverse Funktionen

$\exists$ nur dann eine Inverse, falls die Funktion injektiv ist.

Injektiv: Jede Gerade zur parallel zur x-Achse schneidet den Graph der Funktion in höchstens einem Punkt!

Inverse Funktion ist Spiegelung an xy-Ebene:

1. Wenn $y = f(x)$ gegeben $\to$ nach x umformen
2. x & y tauschen

injektiv: für jedes y *höchstens* ein x

surjektiv: für jedes y *mindestens* ein x

bijektiv für jedes y *genau* ein x

Koordinatentrans. in Koordinaten ξ, η

$$\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix}$$

$x_1 = \frac{1}{ad-bc}(d\cdot\xi - b\cdot\eta), \quad y_1 = \frac{1}{ad-bc}(-c\cdot\xi + a\cdot\eta)$

$g(\xi,\eta) = f(x_1,y_1)$

$$\iint_{B(x,y)} f(x,y)dxdy = \iint_{B(\xi,\eta)} g(\xi,\eta)\cdot|det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}|^{-1} d\xi d\eta$$

Geometrie

Schnittwinkel

Zwei lineare Funktionen: $tan(\alpha) = |\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}|$

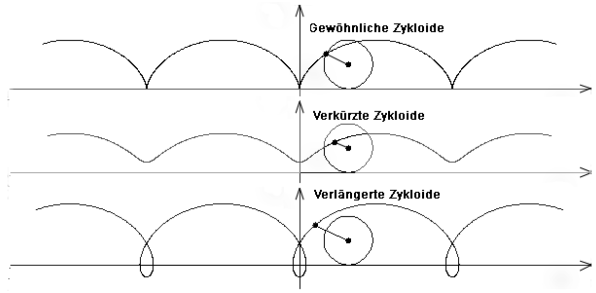
Zwei Richtungsvektoren: $cos(\alpha) = \frac{|\vec{x}\cdot\vec{y}|}{|\vec{x}||\vec{y}|}$

Kurve und Fläche: $sin(\alpha) = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{x}|}{|\vec{n}||\vec{x}|}$

Zwei Flächen: $cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}$

Zykloide

$$\begin{pmatrix}x(t) \\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at - c\cdot sin(t) \\ a - c\cdot cos(t)\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a: & Radius\ Kreis \\ c: & Abstand\ P - Mittelpkt \end{matrix}$$



Epizykloide $\to$ Kreis ($r_1 = a$) rollt auf Kreis ($r_2 = b$)

$$\begin{pmatrix}x(t) \\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)cos(t) - a\cdot cos((1+\frac{b}{a})t) \\ (a+b)sin(t) - a\cdot sin((1+\frac{b}{a})t)\end{pmatrix}$$

$\to \frac{b}{a}$ ganzzahlig: Kurve geschlossen nach 1 Umdrehung

Bogenlänge: $s = 8ma \to m = 1 + \frac{b}{a}$

Fläche unter Kurve: $A = m(m+1)\cdot a^2\pi$

Kardioide: $\Rightarrow b = a$

Nephriode: $\Rightarrow b = 2a$

Abstand Fota S. 102/106

Punkt-Ebene:

$d = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ oder $d = \frac{|\vec{AP}\cdot\vec{n}|}{n}$

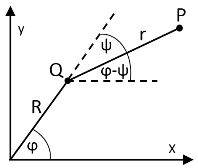
Punkt P - Gerade $A + t(\vec{u})$:

$d = \frac{|\vec{u}\times(\vec{P}-\vec{A})|}{|\vec{u}|} \qquad \to \vec{u} =$ Richtungsvektor der Gerade

Roboterarm

$Q(\varphi) = (Rcos(\varphi), Rsin(\varphi)$

$P(\varphi) = Q(\varphi) + (rcos(\varphi-\psi), rsin(\varphi-\psi)$

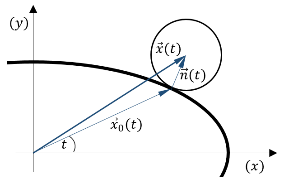


Kreis auf Ellipse

$x(t) = x_0(t) + C\cdot\frac{n(t)}{|n(t)|}$

C =Abstand von der Ellipse

$\vec{n}$ = Normalvektor zur Ellipse



Seilbogen

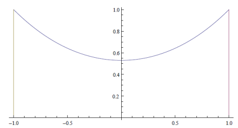
$f(x) = acosh\left(\frac{x-x_0}{a}\right) + b$

$x_0 = 0 \to a = \frac{1}{arsinh(1)} = \frac{1}{ln(1+\sqrt{2})}$

$L = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+sinh^2((x-x_0)/a}\,dx =$

$2\int_0^1 cosh(x/a)dx = 2asinh(1/a) =$

$2/ln(1+\sqrt{2})$



Fehlerrechnung Fota S.64

Voraussetzung: h ist sehr klein

$f(x_0+h) \approx f'(x_0)\cdot h + f(x_0) + Rest$

$\to$ Weil: $f'(x_0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Linearisieren

Tangente an $f(x)$ im Punkt (x_0,y_0)(lin. Ersatzfkt.):

$y(x) = t(x) = f'(x_0)(x-x_0) + y_0$

Tangentialebene im Punkt (x_0,y_0) :

$t(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x((x_0,y_0)(x-x_0)) +$
$f_y((x_0,y_0)(y-y_0)) = z$

3D-Parameter:

$$\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0)\end{pmatrix} + r\cdot grad\begin{pmatrix}x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0)\end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

$$\vec{n}_E\cdot\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \vec{n}_E\cdot\begin{pmatrix}x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0)\end{pmatrix}$$

$\vec{n}_E = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1)^T$

Fehlerfunktion: $\phi(x) = f(x) - [f'(x_o)\cdot(x-x_0) + f(x_0)]$

Approximationen für kleine Werte von $(x) << 1$

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x; \quad \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \approx 1 - x$

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$

Beweise

Zwischenwertsatz für stetige Funktionen

Annahme: $f(a) \leqq m$ und $f(b) \geqq m$

Definiere zwei Folgen:

$$x_{i+1} = \begin{cases}\frac{1}{2}(x_i+y_i) & falls\ f(\frac{1}{2}(x_i+y_i)) < m \\ x_i & falls\ f(\frac{1}{2}(x_i+y_i)) \geqq m\end{cases}$$

$$y_{i+1} = \begin{cases}\frac{1}{2}(x_i+y_i) & falls\ f(\frac{1}{2}(x_i+y_i)) \geqq m \\ y_i & falls\ f(\frac{1}{2}(x_i+y_i)) < m\end{cases}$$

Grenzwerte: $y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{y_n-x_n}{2} = ... = \frac{b-a}{2^n}$

Daraus folgt: $0 = \lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n$

Wir setzten: $\lim y_n = \xi = \lim x_n$

Laut Definition: $f(\xi) = f(\lim y_n) = f(\lim x_n) \geqq m$,
$m \leqq f(\lim y_n) = f(\lim x_n) = f(\xi) \Rightarrow f(\xi) = m$

Regel von Bernoulli-Hôpital

Wähle X mit $a < X < b$
$h : x \to h(x) = f(x)g(X) - f(X)g(x)$
$h(a) = 0 = h(X)$ nach Satz von Rolle: $a < \xi < X$
mit $h'(\xi) = 0$
folgt: $0 = h'(\xi) = f'(\xi)g(X) - f(X)g'(\xi)$
damit: $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(X)}{g(X)}$, $a < \xi < X$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz: $f : x \to f(x)$, im Intervall (a, b) ist ein Extrema, $a < \xi < b$, dann gilt: $f'(\xi) = 0$
Annahme: $f'(\xi) > 0$ führt zu Widerspruch
Definitonsgemäss: $f'(\xi) = \lim\limits_{n\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$
Daraus: $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} > 0$
Für x hat $f(x) - f(\xi)$ dasselbe Vorzeichen wie $x - \xi$
$x - \xi > 0 \Rightarrow f(x) > f(\xi)$, $x - \xi < 0 \Rightarrow f(x) < (\xi)$
$\nexists$ lokal Min-/Maxstelle $\to$ Widerspruch

Ableitung

Satz: $f'(x) = Af(x)$ und $g'(x) = Ag(x)$
$\Rightarrow \forall x$ gilt: $f(x) = Cg(x)$
Definition: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, dann gilt:
$h'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{Af(x)g(x) - f(x)Ag(x)}{(g(x))^2} = 0$
Aus $h'(x) \equiv 0$ und $h(x) \equiv C$ folgt: $f(x) \equiv Cg(x)$

Hauptsatz der Infinitesimalrechung

Satz: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ und $F'(x) = f(x)$
Differenzenquotien: $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} =$
$\frac{1}{h}(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$
$c_h \in [x, x+h]$ mit $f(c_h) \cdot h = \int_x^{x+h} f(t)dt$
$\lim\limits_{h\to 0} f(c_h) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f(x)$

Kettenregel

$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Laut Definition: $\frac{d}{dx} f(g(x)) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$
Setze $g(x + \Delta x) - g(x) = d$ (wenn $\Delta x \to 0$, dann $d \to 0$)
$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(g(x)+d)-f(g(x))}{d} \cdot \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right) =$
$\lim\limits_{d\to 0} \frac{f(g(x)+d)-f(g(x))}{d} \cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Additionstheoreme — Fota S.99

Allgemeines

$cos(-x) = cos(x)$; $cos(x \pm \frac{\pi}{2}) = \mp sin(x)$
$cos(a) = sin(\frac{\pi}{2} \pm a)$; $tan(a) \pm tan(b) = \frac{sin(a\pm b)}{cos(a)cos(b)}$
$cos(a) - sin(a) = \sqrt{2} \cdot sin(\frac{\pi}{4} - a) = \sqrt{2} \cdot cos(\frac{\pi}{4} + a)$
$1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$

Cot

$1 + cot^2(x) = \frac{1}{sin^2(x)}$; $cot(a \pm b) = \frac{cot(a)cot(b)\mp 1}{cot(a)\pm cot(b)}$
$cot(2a) = \frac{cot^2(a)-1}{2cot(a)}$

a ± b

$sin(a \pm b) = sin(a)cos(b) \pm cos(a)sin(b)$
$cos(a \pm b) = cos(a)cos(b) \mp sin(a)sin(b)$
$tan(a \pm b) = \frac{tan(a)\pm tan(b)}{1\mp tan(a)tan(b)}$; $cot(a \pm b) = \frac{cot(a)cot(b)\mp 1}{cot(a)\pm cot(b)}$

2a

$sin(2a) = 2sin(a)cos(a) = \frac{2tan(a)}{1+tan^2(a)}$
$cos(2a) = cos^2(a) - sin^2(a) = \frac{1-tan^2(a)}{1+tan^2(a)} = 1 - 2sin^2(a) = 2cos^2(a) - 1$; $tan(2a) = \frac{2tan(a)}{1-tan^2(a)}$

3a

$sin(3a) = 3sin(a) - 4sin^3(a)$; $cos(3a) = 4cos^3(a) - 3cos(a)$

$\frac{a}{2}$

$sin(\frac{a}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 - cos(a))}$; $cos(\frac{a}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 + cos(a))}$

Potenzen

$sin^2(a) = \frac{1}{2} \cdot (1 - cos(2a))$; $sin^3(a) = \frac{1}{4} \cdot (3sin(a) - sin(3a))$
$sin^4(a) = \frac{1}{8} \cdot (cos(4a) - 4cos(2a) + 3)$
$cos^2(a) = \frac{1}{2} \cdot (1 + cos(2a))$; $cos^3(a) = \frac{1}{4} \cdot (3cos(a) - cos(3a))$
$cos^4(a) = \frac{1}{8} \cdot (cos(4a) - 4cos(2a) + 3)$

Eulerformel

$cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ $sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$
Trick: wenn nur sin bzw. cos $\to$ substituiren und lösen

Hyperbolische Funktionen — Fota S.60

Allgemeines

$cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$
$coth(x) = \frac{cosh(x)}{sinh(x)}$
$tanh(a \pm b) = \frac{1}{coth(a\pm b)} = \frac{tanh(a)\pm tanh(b)}{1\pm tanh(a)tanh(b)}$

2a und 3a

Alles gleich wie für *sin* und *cos* *(Fota S.99)*,
$\to sin \hat{=} sinh$, $cos \hat{=} cosh$, $tan \hat{=} tanh$

$\frac{a}{2}$

$sinh(\frac{a}{2}) = \sqrt{\frac{cosh(a)-1}{2}}$, $x \geq 0$; $cosh(\frac{a}{2}) = \sqrt{\frac{cosh(a)+1}{2}}$
$sinh(\frac{a}{2}) = -\sqrt{\frac{cosh(a)-1}{2}}$, $x \leq 0$

Summen

$sinh(a) + sinh(b) = 2sinh(\frac{a+b}{2})cosh(\frac{a-b}{2})$
$sinh(a) - sinh(b) = 2cosh(\frac{a+b}{2})sinh(\frac{a-b}{2})$
$cosh(a) + cosh(b) = 2cosh(\frac{a+b}{2})cosh(\frac{a-b}{2})$
$cosh(a) - cosh(b) = 2sinh(\frac{a+b}{2})sinh(\frac{a-b}{2})$
$tanh(a) \pm tanh(b) = \frac{sinh(a\pm b)}{cosh(a)cosh(b)}$

Produkte

$sinh(a)sinh(b) = \frac{1}{2} \cdot [cosh(a + b) - cosh(a - b)]$
$cosh(a)cosh(b) = \frac{1}{2} \cdot [cosh(a + b) + cosh(a - b)]$
$sinh(a)cosh(b) = \frac{1}{2} \cdot [sinh(a + b) + sinh(a - b)]$
$tanh(a)tanh(b) = \frac{tamh(a)+tanh(b)}{coth(a)+coth(b)}$

Potenzen

$sinh^2(a) = \frac{1}{2} \cdot (cosh(2a) - 1)$
$sinh^3(a) = \frac{1}{4} \cdot (sinh(3a) - 3sinh(a))$
$sinh^4(a) = \frac{1}{8} \cdot (cosh(4a) - 4cosh(2a) + 3)$
$cosh^2(a) = \frac{1}{2} \cdot (cosh(2a) + 1)$
$cosh^3(a) = \frac{1}{4} \cdot (cosh(3a) + 3cosh(a))$
$cosh^4(a) = \frac{1}{8} \cdot (cosh(4a) + 4cosh(2a) + 3)$

Formel von Moivre

$(cosh(a) \pm sinh(a))^n = cosh(na) \pm sinh(na)$, $n \geq 2$

Inverse der Trigonometrischen Funktionen

$cos(arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ $sin(arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$
$sin(arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $cos(arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$tan(arccos(x)) = x^{-1} \cdot (1 - x)^{\frac{1}{4}}$
$tan(arcsin(x)) = x \cdot (1 - x)^{-\frac{1}{4}}$
$arsinh(x) = ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
$arcosh(x) = ln(x + \sqrt{x^2 - 1}$
$artanh(x) = \frac{1}{2} \cdot ln(\frac{1+x}{1-x})$, $|x| < 1$
$arcoth(x) = \frac{1}{2} \cdot ln(\frac{1+x}{x-1})$, $|x| > 1$
$sinh(2 \cdot arcsinh(x)) = 2x\sqrt{x^2 - 1}$
$sinh(arcosh(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$; $x > 0$
$cosh(arsinh(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$