ANALYSIS II

Übungsstunde III

Ablauf

- Intuitionsübung
- Nachbesprechung der Serie I
- Vorlesungsstoff/Vorbesprechung Serie II
  - Verallgemeinerte Kettenregel
  - Richtungsableitung/Gradient
  - Funktionen in drei Variablen

Multiple Choice – Serie I

Die zweifach stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für welche die partiellen Ableitungen f_{xx} und f_{yy} identisch verschwinden, sind genau

- ✖ die Produkte einer Funktion von x mit einer Funktion von y.
- ✖ die Produkte von zwei linearen Funktionen.
- ✖ die Produkte einer linearen Funktion von x mit einer linearen Funktion von y.
- ✔ die Funktionen der Gestalt $a + bx + cy + dxy$ für Konstanten a, b, c, d. ✔

Bewertungsmethode: **SC1/0**

Serie I – Aufgabe 1d)

1. (♥) Gegeben ist die Funktion

$$f : (x, y) \mapsto \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

(a) Bestimmen Sie den (aufgrund der gegebenen Formel grösstmöglichen) Definitionsbereich sowie den (zugehörigen) Wertebereich von f.

(b) Diskutieren Sie die Niveaulinien von f und zeichnen sie für die Funktionenswerte $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ und 1 auf.

(c) Berechnen Sie die lineare Ersatzfunktion von f im Punkt $(1, 1)$.

(d) Die Grössen x und y seien in der Nähe von $(1, 1)$ und werden auf 1% genau gemessen. Schätzen Sie den relativen Fehler der Grösse $z = f(x, y)$ ab.

(e) Berechnen Sie alle zweiten partiellen Ableitungen von f und überprüfen Sie den Satz von Schwarz.

Serie I - Aufgabe 5

5. (★) Sei f eine *beliebige* differenzierbare Funktion einer Variablen. Zeigen Sie, dass alle Tangentialebenen der Fläche

$$z = y \cdot f\left(\frac{x}{y}\right)$$

durch den Punkt $(0, 0, 0)$ gehen.

Verallgemeinerte Kettenregel

Die Ableitung einer Funktion mit parametrisierten Variablen lautet:

$$F'(t) = grad(f(\vec{r}(t))\cdot\dot{\vec{r}}(t) = f_x(x(t), y(t), z(t))\cdot\dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t), z(t))\cdot\dot{y}(t) + f_z(x(t), y(t), z(t))\cdot\dot{z}(t)$$

- Gegeben:
  - f(x,y,z) Eine Funktion mit den Variablen x,y,z
  - Die Parametrisierung r(t) = (x(t), y(t), z(t))

- Direkte Berechnung (wie bisher):
  - Die Parametrisierung $(x(t), y(t), z(t))$ in die Funktion einsetzen
  - ➢ Funktion in t $\longrightarrow$ Ableitung $f'(t)$ berechnen

- Berechnung über die Verallgemeinerte Kettenregel
  - Partielle Ableitungen f_x, f_y, f_z berechnen
    - Parametrisierung in die partiellen Ableitungen einsetzen
  - Ableitung der Parametrisierung $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ berechnen
  - ➢ $f'(t) = f_x(r(t)) \cdot x'(t) + f_y(r(t)) \cdot y'(t) + f_z(r(t)) \cdot z'(t)$

Beispielaufgabe

- Berechne die Ableitung folgender Parametrisierter Funktion (einmal direkt und einmal über die verallgemeinerte Kettenregel)

$$f(x,y) = ln(x) + e^y + 2 \ \text{ mit } \ x(t) = t^3, \ \ y(t) = ln(t)$$

Lösung zur Beispielaufgabe

Wir berechnen den Gradienten von f sowie die Ableitung der Parametrisierung:

$$grad(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ e^y \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

Nun kann man dies in die Formel einsetzen und erhält für die Ableitung der parametrisierten Funktion:

$$f'(t) = \frac{1}{t^3} \cdot 3t^2 + e^{\ln(t)} \cdot \frac{1}{t} = \frac{3}{t} + 1$$

Funktionen in 3 Variablen

- $Grad(f(r)) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \cdot f$ $\longrightarrow$ Ein Vektor in $\mathbb{R}^3$

- Integrabilitätsbedingungen: $\varphi = f_x$ / $\psi = f_y$ / $\chi = f_z$
  - Bedingung erfüllt, wenn:
    - $\varphi_y = \psi_x$
    - $\psi_z = \chi_y$
    - $\varphi_z = \chi_x$

Richtungsableitung

Definition. Die **Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{e}$ an der Stelle $\vec{r_0}$** ist

$$D_{\vec{e}} f(\vec{r_0}) := \operatorname{grad} f(\vec{r_0}) \cdot \vec{e}.$$

Dabei ist $\vec{e}$ ein Einheitsvektor.

Basisprüfung Sommer 2022 – Single Choice

Frage 17 (IV) Gegeben ist die Funktion $f(x, y, z) = xy^3 + yz^2$. Man setze sich in den Punkt $(1, -1, 1)$. In welche Richtung muss man schauen, um eine Zunahme der Funktionswerte festzustellen?

A $1/\sqrt{3} \cdot (-1, 1, 1)$	C $1/\sqrt{3} \cdot (1, -1, -1)$
B $1/\sqrt{3} \cdot (-1, -1, -1)$	D $1/\sqrt{3} \cdot (-1, -1, 1)$

Lösung zur vorangehenden Aufgabe

Wir berechnen als erstes den Gradient im Stützpunkt:

$$grad(f) = \begin{pmatrix} y^3 \\ 3xy^2 + z^2 \\ 2yz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Wir suchen nun den Vektor, der im Skalarprodukt mit dem Gradienten ein positiven Wert ergibt. Eine Normierung der Vektoren ist nicht nötig, da diese bereits normiert sind.

Für die Antwortmöglichkeit A erhaltet man:

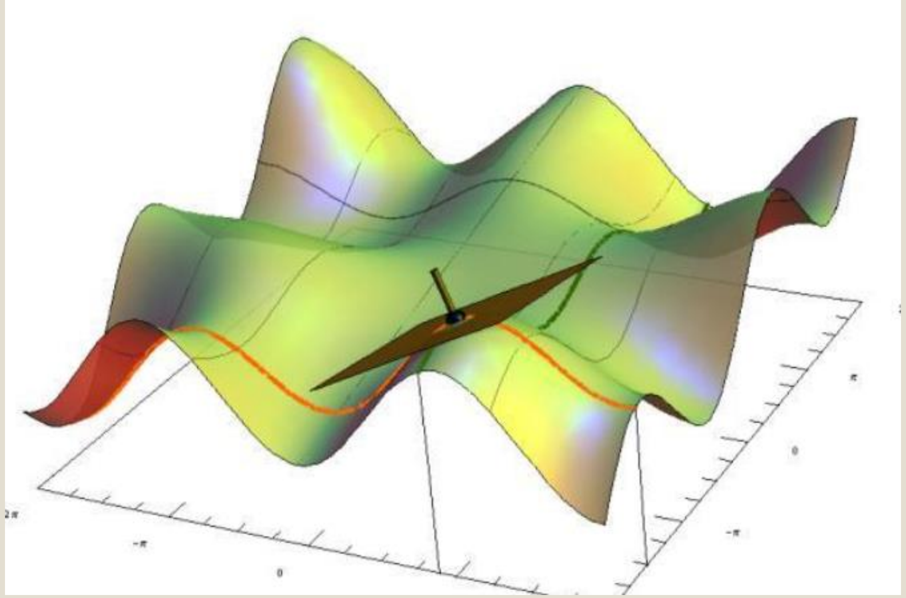
$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1 + 4 - 2) = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

Da dies positiv ist, stellt A) die korrekte Antwort dar.

Tangentialebene

- Die Tangentialebene T an eine Niveaufläche F(x,y,z) = C an der Stelle $\overrightarrow{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ ist gegeben durch:

$$\text{T: } (\vec{r} - \overrightarrow{r_0}) \cdot grad\, f(\overrightarrow{r_0}) = 0$$



Methode 2

1. grad$(f(x_0, y_0,\ z_0)) = (A, B, C)^T$ bestimmen
2. Tangentialebene: $D = Ax + By + Cz$
3. Gesuchter Punkt (x_0, y_0, z_0) einsetzen um D zu bestimmen: $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$
4. Die Tangentialebene lautet: $T(x_0, y_0,\ z_0) \ \rightarrow D = Ax + By + Cz$

Basisprüfung Sommer 2018 - SC

22. (Tangentialebene SC) Die Gleichung der Tangentialebene an das Ellipsoid $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 81$ im Punkt $(2, 1, 5)$ lautet

    (a) $2x + 4y + 6z = 38.$

    (b) $4x + 2y + 12z = 60.$

    (c) $4x + 4y + 30z = 162.$

    (d) $8x + 2y + 24z = 138.$

Lösung Aufgabe Tangentialebene

Als erstes berechnet man den Gradient von der Funktion im Stützpunkt:

$$grad(f) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Da der Gradient senkrecht auf der Tangentialebene steht, kann man diese folgendermassen schreiben:

$$D = 4x + 4y + 30z$$

Um D zu bestimmen setzen wir erneut den Stützpunkt ein:

$$D = 8 + 4 + 150 = 162$$

Die Tangentialebene ist daher gegeben als $162 = 4x + 4y + 30z$ und die Antwort C ist korrekt.

Lineare Ersatzfunktion

Definition. Die **lineare Ersatzfunktion $l(\vec{r})$ von f an der Stelle $\overrightarrow{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$** ist für die Variable $\vec{r} = (x, y, z)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} l(\vec{r}) &= f(\overrightarrow{r_0}) + f_x(\overrightarrow{r_0}) \cdot (x - x_0) + f_y(\overrightarrow{r_0}) \cdot (y - y_0) + f_z(\overrightarrow{r_0}) \cdot (z - z_0) \\ &= f(\overrightarrow{r_0}) + \operatorname{grad} f(\overrightarrow{r_0}) \cdot (\vec{r} - \overrightarrow{r_0}). \end{aligned}$$