Kugelkoordinaten

Variablen:
- φ
- r
- θ

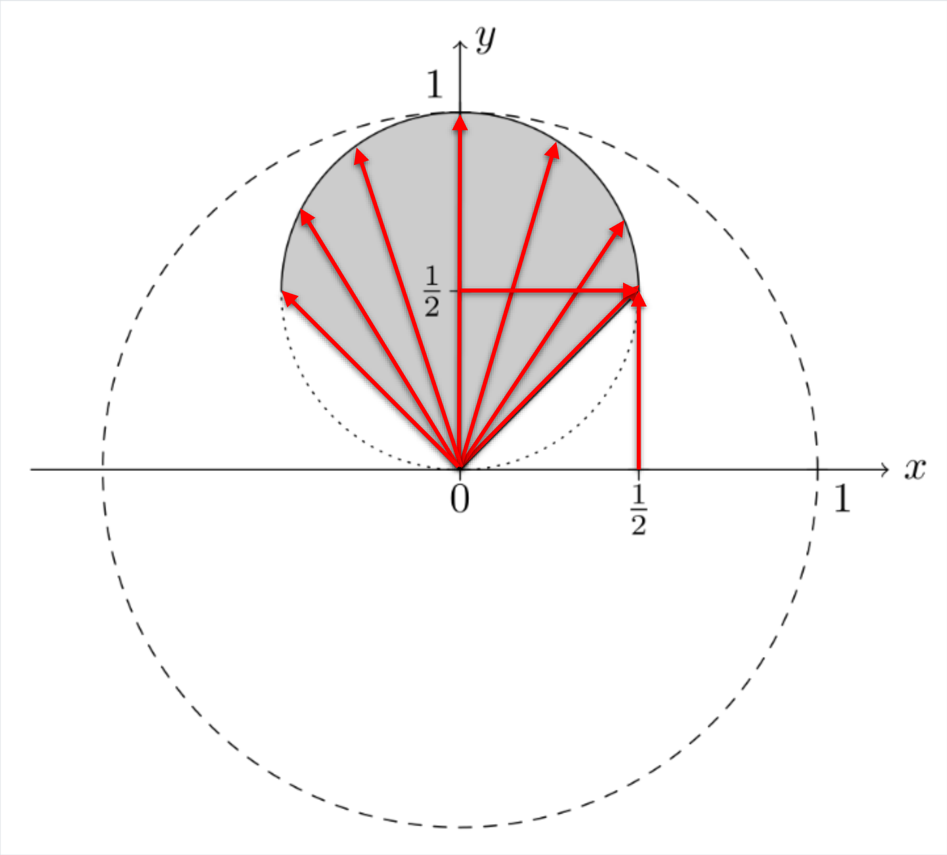
<u>Parametrisierung von B</u>

◦ Benötigte Variablen: r & φ

➢ $\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

➢ Nur für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist $\mathrm{r} = 1$ sonst gilt: $\mathrm{r} < 1$

Sei B der grau gekennzeichnete Bereich in der xy-Ebene:

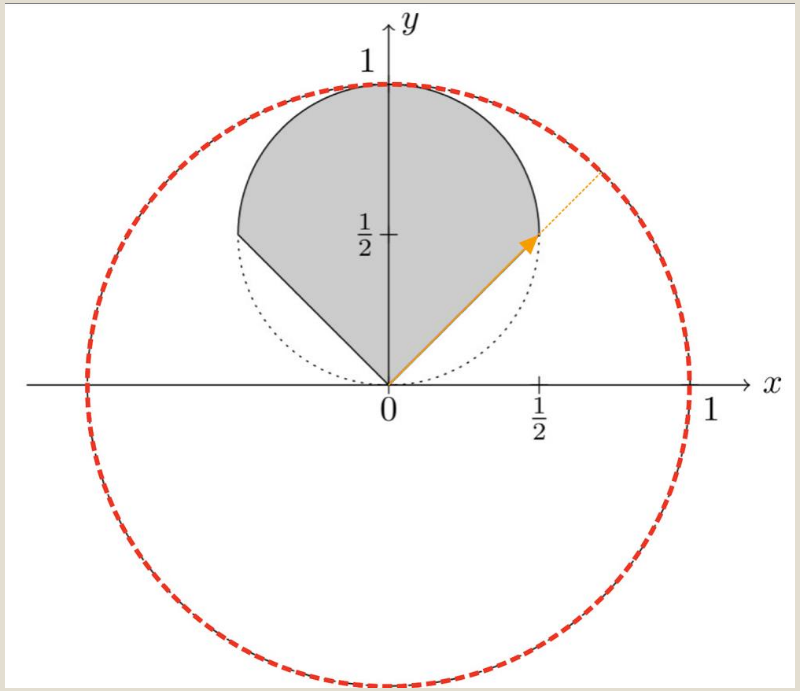


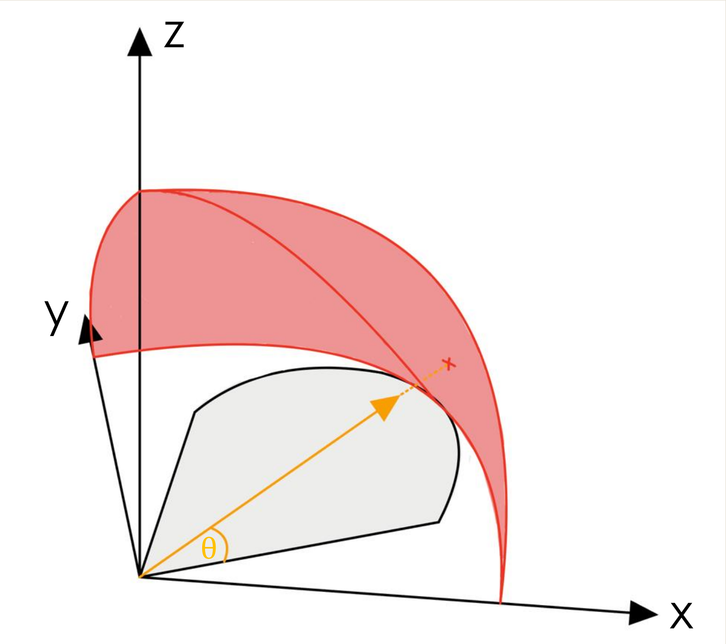
Parametrisierung der Einheitskugel

- Die letzte verbleibende Variable ist θ

- Für die Einheitskugel ist der Radius konstant 1

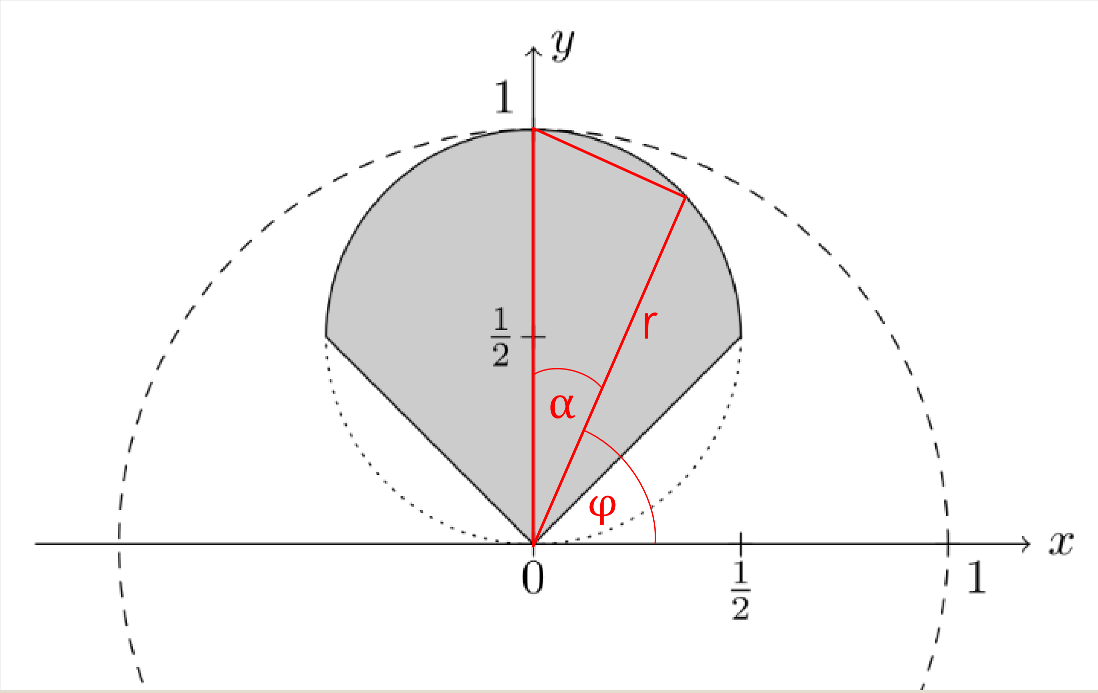
  - Dies ist nicht möglich mit der Parametrisierung von dem Gebiet B, unabhängig von θ





Zylinderkoordinaten

Sei B der grau gekennzeichnete Bereich in der xy-Ebene:



Parametrisierung von B

- $\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

- $r = \frac{\cos(\alpha)}{1}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$

$\longrightarrow \quad r = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin(\varphi)$

- Alternativ: Polarkoordinaten in die Kreisgleichung $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ einsetzen:

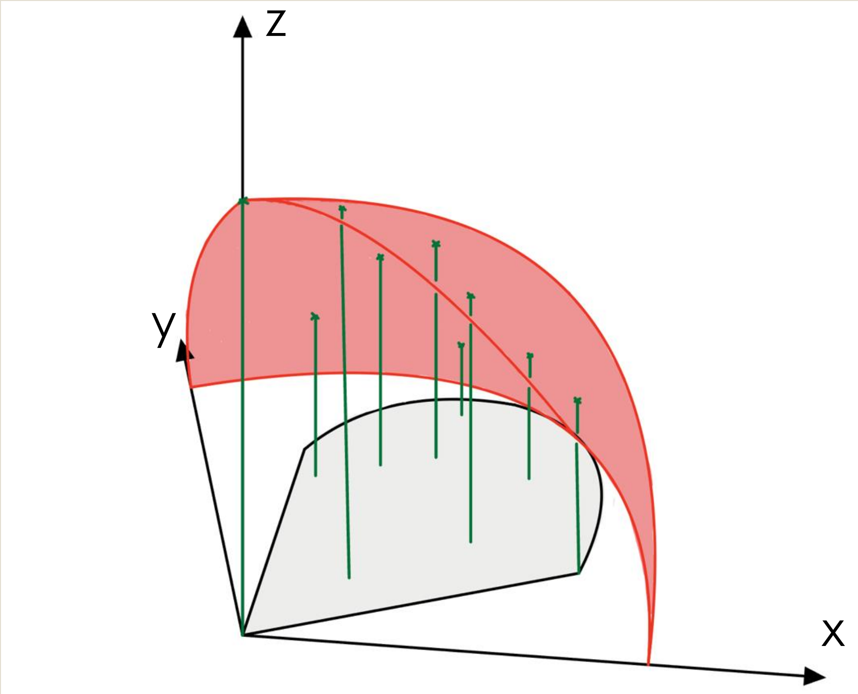
$$r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi) - r\, sin(\varphi) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \iff r^2 = r \sin(\varphi) \iff r = \sin(\varphi)$$

Grenzen für z

z muss in jedem Punkt dem Abstand von der xy-Ebene zur Kugelschale entsprechen.

Parametrisierung der Einheitskugel: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$\longrightarrow$ Umformen nach z: : $z = \pm\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} = \pm\sqrt{1 - r^2}$



Integral: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\sin(\varphi)} \int_0^{\sqrt{1-r^2}} r \cdot dz\, dr\, d\varphi$

In Polarkoordinaten: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\sin(\varphi)} r \cdot \sqrt{1 - r^2}\, dr\, d\varphi$