ANALYSIS II

Übungsstunde VI

Ablauf

- Intuitionsübung IV
- Nachbesprechung Serie 4
- Vektoranalysis
  - Divergenz & Rotation
  - Flächen im Raum
  - Tangentenebene
  - Normaleneinheitsvektor
  - Oberflächenberechnung

Intuitionsübung

Letzte Woche war die Wahl des Koordinatensystems für ein mehrfaches Integral eher überraschend. Wir wollen eine ähnliche Aufgabe anschauen. Sie stammt aus einer älteren Basisprüfung für Analysis I/II am D-INFK:

> Man bestimme den Volumeninhalt des Glace-Cornets, welches durch die beiden Flächen
>
> $$x^2 + y^2 = 3z^2, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$
>
> begrenzt wird und $z \geq 0$ erfüllt.

Wir fragen wie immer nicht nach der vollständigen Lösung, weil dies für unsere kurzen Intuitionsübungen etwas zu aufwendig ist. Wir wollen uns um die Strategie kümmern und stellen die folgende **Aufgabe für die folgenden 3 Minuten:**

1. Zeichnen Sie eine Skizze des gesuchten Volumens.
2. Entscheiden Sie sich für ein geeignetes Koordinatensystem, in dem sich die geometrischen Bedingungen gut ausdrücken lassen.
3. Stellen Sie für den Volumeninhalt ein mehrfaches Integral in Ihrem Koordinatensystem auf.

Falls Sie in der Zeit nicht fertig werden, können Sie im nächsten Schritt weiter daran arbeiten - Kein Problem. Aber: Fahren Sie erst dann mit der nächsten Seite dieses Quizzes fort, wenn Sie die Anweisung dazu erhalten!

Intuitionsübung

Unterbrechen Sie Ihre Lösungsarbeit und nehmen Sie sich **1 Minute Zeit zur Beantwortung folgender Fragen**:

1. Wie viele Dimensionen hat Ihr Koordinatensystem bzw. das Integral, das Sie damit aufstellen?
2. Welches Koordinatensystem haben Sie gewählt? (Zum Beispiel Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten, Polarkoordinaten, ...)

Fahren Sie erst dann mit der nächsten Seite fort, wenn Sie die Anweisung dazu erhalten!

Intuitionsübung

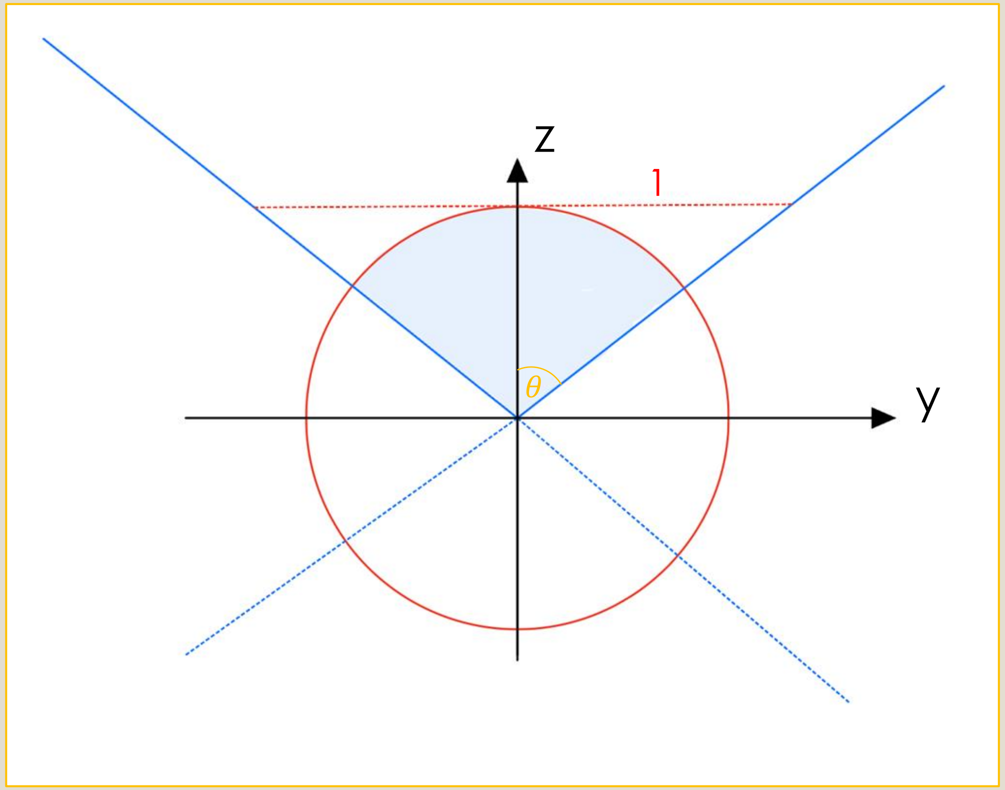
Nehmen Sie sich erneut **3 Minuten Zeit** und diskutieren Sie mit der Person neben Ihnen, welches Koordinatensystem wohl am ehesten zum Erfolg führt. Finden Sie ausserdem ein mehrfaches Integral, welches den Volumeninhalt berechnet und das ausserdem auf den ersten Blick gut ausrechenbar ist.

Hier nochmal die beiden Gleichungen:

$$x^2 + y^2 = 3z^2, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad z \geq 0$$

Lösung Intuitionsübung

- $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \rightarrow$ Einheitskugel
- $x^2 + y^2 = 3z^2 \rightarrow$ Kegel mit Radius $\sqrt{3}$ bei z = ± 1
- $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \arctan(\sqrt{3}) = \theta = \frac{\pi}{3}$



sphärisch

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

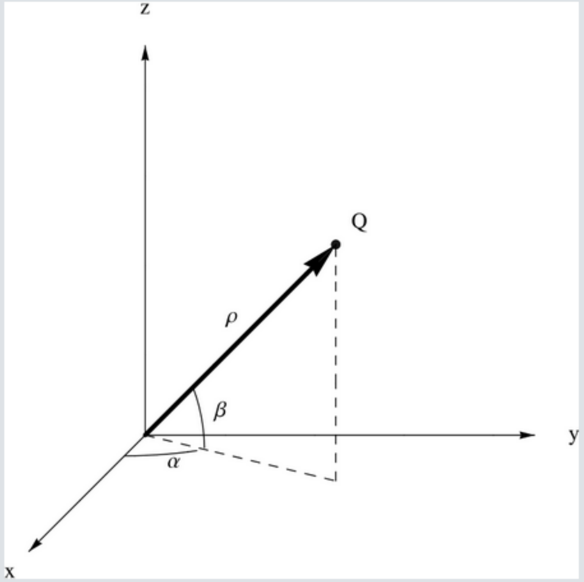
$$\theta = arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

$$\varphi = arctan(\frac{y}{x})$$

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} r^2 \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot dr = \frac{\pi}{3}$$

Multiple Choice

Das Volumenelement der Koordinaten, welche in der untenstehenden Abbildung definiert sind, ist gegeben durch



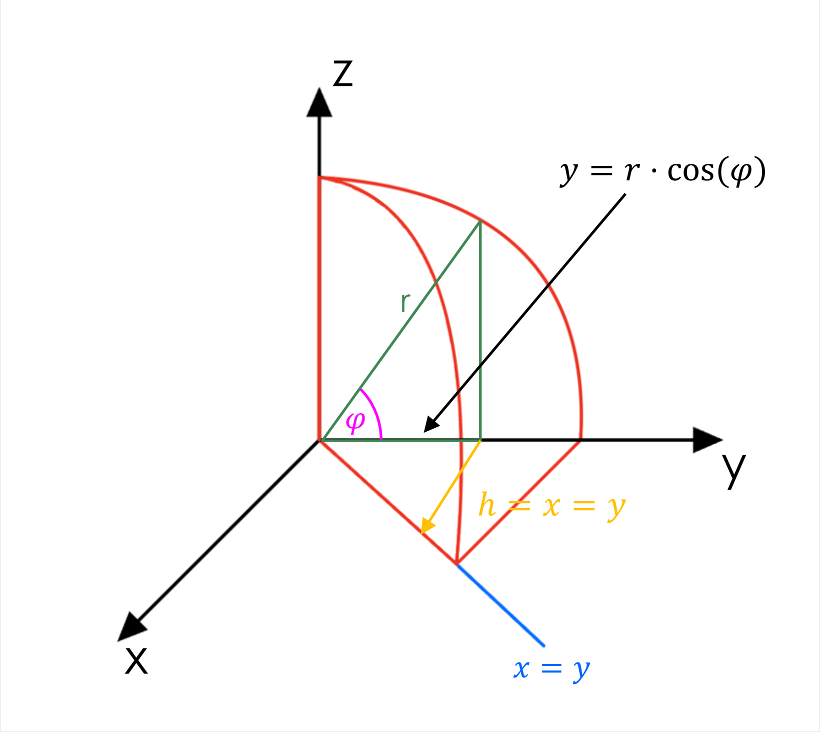
- $\varrho^2 \cos\beta \, d\varrho \, d\alpha \, d\beta$.
- $\varrho \cos\alpha \, d\varrho \, d\alpha \, d\beta$.
- $\varrho^2 \sin\beta \, d\varrho \, d\alpha \, d\beta$.
- $\varrho \, d\varrho \, d\alpha \, d\beta$.
- $\varrho \sin\beta \, d\varrho \, d\alpha \, d\beta$.

Aufgabe 2b)

<u>Lösung in Zylinderkoordinaten</u>

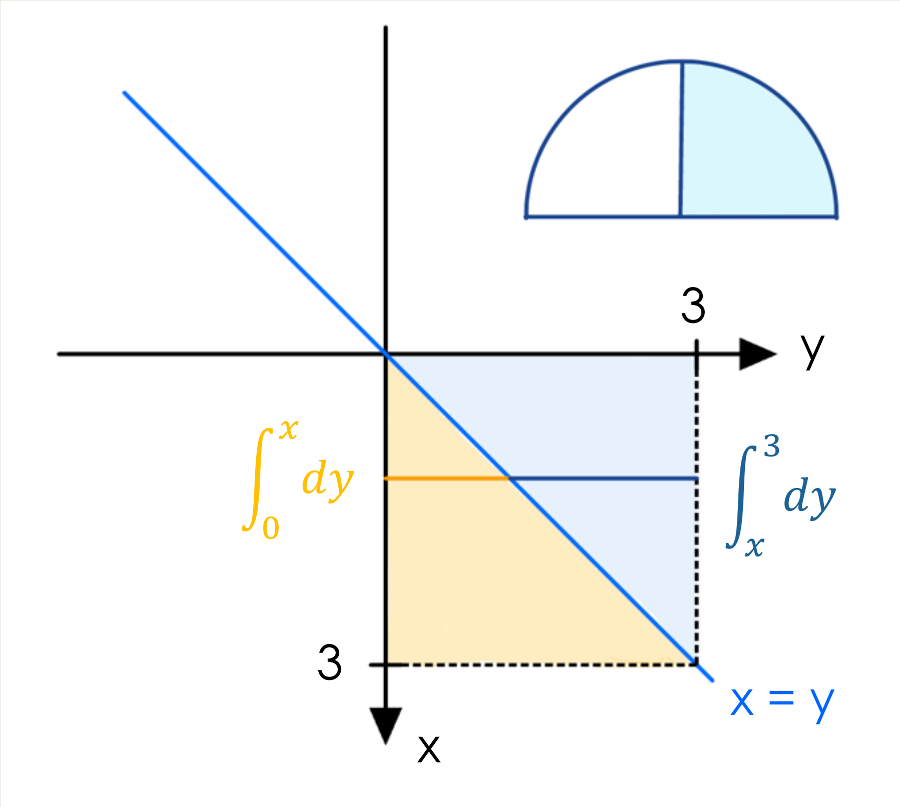
Liegender Zylinder $\longrightarrow$ φ in der yz-Ebene & Höhe entlang $\hat{x}$

- $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (Viertelkreis)
- $r \in [0, 3]$
- $x = r \cdot \cos(\varphi)$



$$V = \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r\cdot\cos(\varphi)} r \cdot dx\, d\varphi\, dr = \int_0^3 r^2 \cdot \sin(\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \int_0^3 r^2\, dr = \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^3 = \frac{27}{3} = 9$$

Häufiger Fehler in kart. Koordinaten



$$V = \int_0^3 \int_x^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} dz\, dy\, dx$$

$$V = \int_0^3 \int_0^x \int_0^{\sqrt{9-y^2}} dz\, dy\, dx$$

Das orangene und das blaue Gebiet besitzen zwar dieselbe Fläche, aber über ihnen liegt nicht das dasselbe Volumen.

→ Es muss von x bis 3 integriert werden

Divergenz und Rotation

Divergenz: $Div(\vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$, $div(\vec{v}) = 0 \ \rightarrow \text{Quellenfrei}$

Rotation: $Rot(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \ \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial/_{\partial x} \\ \partial/_{\partial y} \\ \partial/_{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y \cdot v_3 - \partial_z \cdot v_2 \\ \partial_z \cdot v_1 - \partial_x \cdot v_3 \\ \partial_x \cdot v_2 - \partial_y \cdot v_1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{r}ot(\vec{v}) = 0 \ \rightarrow \text{Wirbelfrei}$

Beispielaufgaben

Basisprüfung Winter 2018 (SC)

10. Es sei $\vec{v}$ ein Vektorfeld und f ein Skalarfeld. Welche Identität gilt nicht immer?

   (a) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = 0$

   (b) $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v}) = \vec{0}$

   (c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$

Basisprüfung Sommer 2017 (MC)

25. Es sei $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Bestimmen Sie für jede der folgenden Bildungen, ob diese zulässig ist!

   (a) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}$

   (b) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v}$

   (c) $\operatorname{grad}\operatorname{grad}\vec{v}$

$\underline{div\left(rot(\vec{v})\right) \equiv 0}$

$$rot(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \partial_y \cdot v_3 - \partial_z \cdot v_2 \\ \partial_z \cdot v_1 - \partial_x \cdot v_3 \\ \partial_x \cdot v_2 - \partial_y \cdot v_1 \end{pmatrix} \rightarrow div\left(rot(\vec{v})\right) = \frac{\partial\left(v_{3y} - v_{2z}\right)}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial(v_{1z} - v_{3x})}{\partial y} + \frac{\partial\left(v_{2x} - v_{1y}\right)}{\partial z}$$

$$= v_{3yx} - v_{2zx} + v_{1zy} - v_{3xy} + v_{2xz} - v_{1yz} \overset{\substack{\text{Satz von Schwarz} \\ \downarrow}}{\equiv} 0$$

$\underline{rot(grad(f)) \ \equiv 0}$

$$rot(grad(f)) = rot\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{zy} - f_{yz} \\ f_{xz} - f_{zx} \\ f_{yx} - f_{xy} \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz von Schwarz}}}{\equiv} 0$$

Flächen im Raum

Ausblick: Fluss durch die Oberfläche eines Körpers: $\phi = \iint_O \vec{v} \cdot \overrightarrow{n_0} \cdot dO$

Wie parametrisiert man die Oberfläche (≙ Fläche im Raum)?

- Parametrisierung: $\vec{r}(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$ ⇦ Neu
- Implizite Darstellung als Lösungsmenge: F(x,y,z) = 0
- Explizite Darstellung (Graph einer Funktion) $\mathrm{f_i}: \ B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

  $(\mathrm{x},\mathrm{y}) \mapsto \mathrm{f_i}(\mathrm{x},\mathrm{y})$

Beispiele Parametrisierung

- Kreisscheibe mit Radius 2 auf der Höhe z = 4 ⟶ Oberfläche = Fläche
  - $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\varphi}) = r \cdot \cos(\varphi)$, $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\varphi}) = r \cdot \sin(\varphi)$, $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\varphi}) = 4$, $\mathrm{r} \in [0,2]$

- Oberfläche der oberen Hälfte einer Vollkugel mit Radius 5

  Kugelschale: $\mathrm{r} = 5,\quad \varphi \in [0,2\pi],\quad \theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$
  - $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta}) = 5 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta)$, $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta}) = 5 \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta)$, $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta}) = 5 \cdot \cos(\theta)$

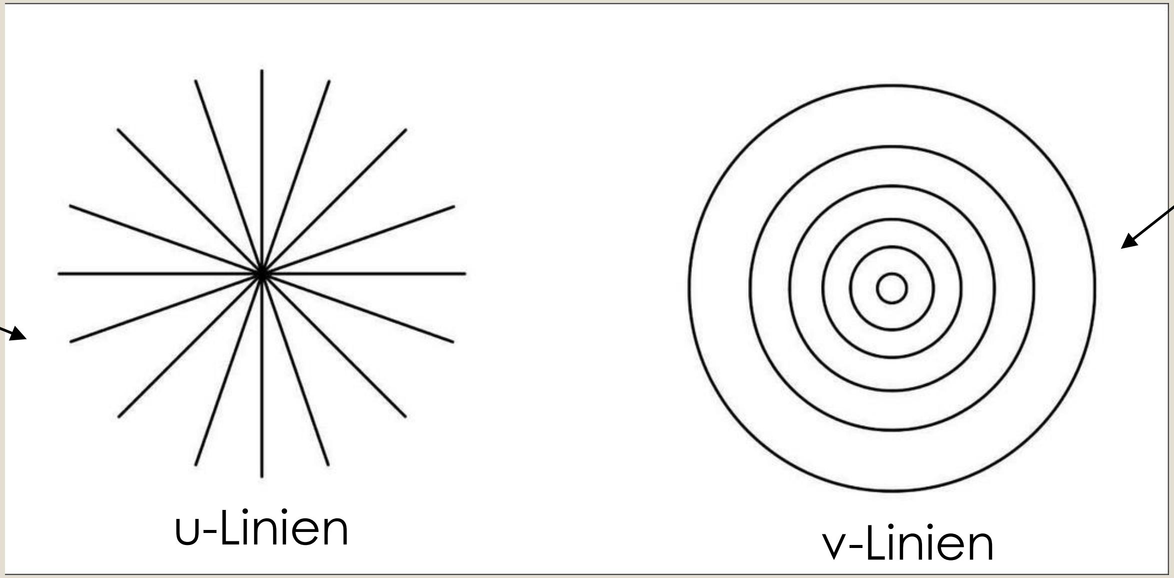
  Kreisscheibe in der xy-Ebene: $\mathrm{r} \in [0, 5],\quad \varphi \in [0,2\pi]$
  - $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\varphi}) = r \cdot \cos(\varphi)$, $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\varphi}) = r \cdot \sin(\varphi)$, $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\varphi}) = 0$

Parameterlinien

- v-Linie: $u = u_0 \rightarrow \vec{r}(u_o, v)$ u wird konstant gehalten, v variiert.
- u-Linie: $v = v_0 \rightarrow \vec{r}(u, v_o)$ v ist konstant, u wird variiert.

Kreis: $\vec{r}(u, v) = \vec{r}(u \cdot \cos(v),\ u \cdot \sin(v))$

Radialer Anteil



Winkel Anteil

Tangentenfläche

- Tangentenfläche $\vec{t}(u,v)$ zur Raumkurve $\vec{s}(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{pmatrix}$:

$$\vec{t}(u,v) = \vec{s}(u) + v \cdot \dot{\vec{s}}(u)$$

Stützpunkt

Normaleneinheitsvektor (NEV)

Ein Vektor der Länge 1, der senkrecht auf einer Fläche im Raum steht

$$\vec{n}(u,v) = \pm \frac{\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}}{|\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}|}$$

Der Vektor ist bis auf das Vorzeichen definiert. Das Vorzeichen bestimmt beispielsweise, ob der Fluss von Aussen nach Innen oder von Innen nach Aussen berechnet wird.

Oberflächenberechnungen

Die Oberfläche eines Körpers wird mit folgendem Integral berechnet:

$$O = \iint_B |\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}| du \cdot dv = \iint_B dO$$

$|\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}|$ entspricht im Allgemeinen nicht der Jacobi-Determinante der Volumen-/Gebietsintegrale und muss i.d.R. für jede Parametrisierung neu berechnet werden!

Nur wenn die Parametrisierung identisch zu der Koordinatentransformation ist, gilt dV/dA = dO

Beispielaufgabe

- Man berechne die Oberfläche einer Kugel mit Radius R

- Wie gross ist die Mantelfläche eines Zylinders mit Radius 2 und Höhe 5?

Oberfläche einer Kugel:

$$O = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \cdot \sin(\theta)\ d\theta\ \mathrm{d}\varphi = 2\pi \cdot R^2 \cdot (-\cos(\theta))\Big|_0^{\pi} = 4\pi R^2$$

Mantelfläche eines Zylinders mit Radius 2 & Höhe 5:

$$O = \int_0^{2\pi} \int_0^{5} 2\ dz\ \mathrm{d}\varphi = 20\pi$$