ANALYSIS II

Schnellübung 4

Tipps

- Aufgabe 1: Den Satz von Stokes mehrmals für geeignete Flächen anwenden.

  Lösung: A = ½

- Aufgabe 2: Parabel mit Scheitelpunkt (0,1): $y = cx^2 + 1$, c durch einsetzen von (a,a) bestimmen. Für Minimum ableiten und = 0 setzen.

  Lösung: a = 2, W(a) = -½

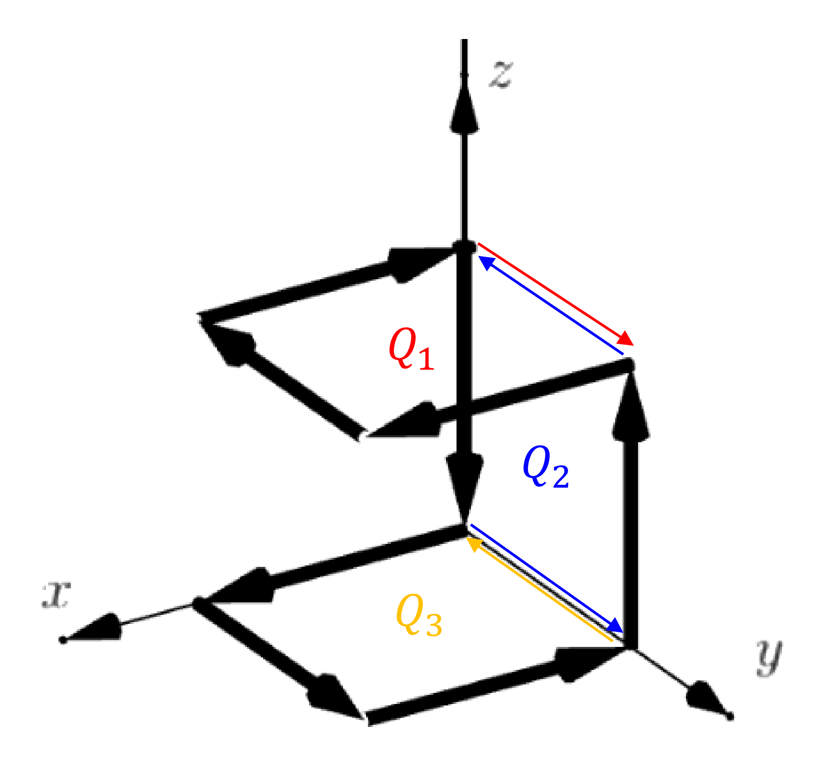
- Aufgabe 3: Identische zu Aufgabe 4 Serie 8

- Aufgabe 4: Ansätze aus der Tabelle als Summe schreiben und in die DGL einsetzen

  Lösung: $y_h + y_p = y(x) = Ae^{2x} - e^x + xe^{2x} + \frac{1}{3}e^{2x}\cos(3x)$

Aufgabe 1

Man wählt als Flächen die drei Einheitsquadrate. Die Wege, mit denen man die Flächen schliesst heben sich dabei immer gegenseitig auf. Daher gilt für die Arbeit



$$W_{tot} = W_{Q1} + W_{Q2} + W_{Q3}$$

$$rot(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x - xy \\ 0 \\ yz - z \end{pmatrix}$$

$$Q_1:\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ rot(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x - xy \\ 0 \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_2:\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ rot(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ yz - z \end{pmatrix} \rightarrow \text{Arbeit} = 0$$

$$Q_3:\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ rot(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x - xy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Arbeit} = 0$$

Aufgabe 1

Für das erste Quadrat berechnet sich die Arbeit zu:

$$W_{Q1} = \int_0^1 \int_0^1 1 - y \, dy \, dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2

Eine Parabel mit Scheitelpunkt in (1,0) hat die Form $y = cx^2 + 1$

Um c zu bestimmen setzt man den Punkt (a,a) ein: $a = ca^2 + 1 \rightarrow c = \frac{a-1}{a^2}$

Man erhält also die Parabel $y = \frac{a-1}{a^2}x^2 + 1$

Als Parametrisierung wählt man $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{a-1}{a^2}t^2 + 1 \end{pmatrix}$

Das Arbeitsintegral berechnet sich zu:

$$W(a) = \int_0^a \begin{pmatrix} \frac{a-1}{a^2}t \\ -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2\frac{a-1}{a^2}t \end{pmatrix} dt = \frac{a-1}{a^2}\int_0^a t - 2dt = \frac{a-1}{a^2}\left(\frac{a^2}{2} - 2a\right) = \frac{a^2 - 5a + 4}{2a}$$

Aufgabe 2

Um das Minimum zu finden leiten wir W(a) nach a an und setzten dies gleich Null

$$\frac{dW}{da} = \frac{(2a-5)2a - 2(a^2 - 5a + 4)}{4a^2} = \frac{2a^2 - 8}{4a^2} = !\,0 \Leftrightarrow a^2 = 4$$

Da a > 0 gelten soll nehmen wir nur die Lösung a = 2

Da W(a) für $a \to 0^+$ und für $a \to +\infty$ nach +∞ strebt haben wir ein Minimum gefunden

Die dazugehörige Parabel lautet: $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ und die Arbeit berechnet sich zu $-\frac{1}{2}$

Aufgabe 4

Als erstes löst man die Homogene DGL $y' = 2y$

$$\int \frac{1}{2y}\,dy = \int 1\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|y| = x + C$$

$$y = A \cdot e^{2x}, \qquad \mathrm{A} \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 4

Enthält $g(x)$ einen Term der Form…	und ist…	so fügen wir die folgende y_P als Lösungsansatz ein:
$P_n(x)$	$c \neq 0$	$y_P = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$
	$c = 0$	$y_P = x(A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n)$
$e^{\alpha x}$	$c \neq -\alpha$	$y_P = Ae^{\alpha x}$
	$c = -\alpha$	$y_P = Axe^{\alpha x}$
$k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)$	$\beta \neq 0$	$y_P = A_1 \cos(\beta x) + A_2 \sin(\beta x)$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	$c \neq -\alpha$	$y_P = (A_0 + \ldots + A_n x^n)e^{\alpha x}$
	$c = -\alpha$	$y_P = x(A_0 + \ldots + A_n x^n)e^{\alpha x}$
$P_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ $+Q_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$\beta \neq 0$	$y_P = (A_0 + \ldots + A_n x^n)e^{\alpha x}\cos(\beta x) +$ $+(B_0 + \ldots + B_n x^n)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

Nun zum partikulären Ansatz:

- Für e^x wählt man Ae^x
- Für e^{2x} wählt man Bxe^{2x}
- Für $-e^{2x}\sin(3x)$ wählt man $Ce^{2x}\cos(3x) + De^{2x}\sin(3x)$

Insgesamt erhält man den Ansatz: $y_p(x) = Ae^x + Bxe^{2x} + Ce^{2x}\cos(3x) + De^{2x}\sin(3x)$

Aufgabe 4

Leitet man dies ab erhält man:

$$y_p'(x) = Ae^x + B(1+2x)e^{2x} + 2C\big(\cos(3x) - 3Csin(3x) + 2Dsin(3x) + 3Dcos(3x)\big)e^{2x}$$

Wenn man dies in die DGL einsetzt folgt:

$$Ae^x + B(1+2x)e^{2x} + 2C\big(\cos(3x) - 3Csin(3x) + 2Dsin(3x) + 3Dcos(3x)\big)e^{2x} - 2Ae^x - 2Bxe^{2x}$$
$$- 2Ce^{2x}\cos(3x) - 2De^{2x}\sin(3x) = e^x + e^{2x} - e^{2x}\sin(3x)$$

Jetzt fehlt noch der Koeffizienten Vergleich

Aufgabe 4

$$e^x: \quad A - 2A = 1 \rightarrow A = -1$$

$$e^{2x}: \quad B = 1$$

$$\mathrm{x}e^{2x}: \quad 2B - 2B = 0$$

$$e^{2x}\cos(3x): \quad 2C + 3D - 2C = 0 \rightarrow D = 0$$

$$e^{2x}\sin(3x): \quad -3C - 2D = -1 \rightarrow C = \frac{1}{3}$$

$$y_p(x) = -e^x + xe^{2x} + \frac{1}{3}e^{2x}\cos(3x)$$

Abschliessend: $y_h + y_p = y(x) = Ae^{2x} - e^x + xe^{2x} + \frac{1}{3}e^{2x}\cos(3x)$