# Übungsstunde 1

## Funktionen in zwei Variablen & Niveaulinien

Funktion in zwei Variablen: $f : (x, y) \longrightarrow f(x, y)$
Diese Funktionen besitzen Niveaulinien. Entlang einer Niveaulinie ist die Funktion konstant. $f(x, y) = C, \ \ C \in \mathbb{R}$

Vorgehensweise Niveaulinien zu einer Funktion zeichen:

1. $f(x, y) = C$ setzen
2. Funktion explizit oder implizit umformen. Ziel: bekannte Formen wie Hyperbel- und Kreisgleichungen finden
3. verschiedene Werte für C einsetzen

Häufige Funktionen:

- Kreis: $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$
- Hyperbel: $C = (\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2$
- Ellipse: $C = (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2$

Beispiel: Bestimme die Form der Niveaulinien der Funktion:

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 5$$

## Partielle Ableitungen

Notation:
$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \longrightarrow$ Partielle Ableitung nach x (y = const.)
$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \longrightarrow$ Zweite partielle Ableitung nach x (y = const.)

Definition Gradient: $gradf(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$

Beim Ableiten werden die anderen Variablen als Konstanten betrachtet.

Beispiel 1: Berechne den Gradient der folgenden Funktion:

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} + ln(4xy) + 7x$$

Beispiel 2: Berechne $g_{yy}$ von: $g(x,y) = cos^2(x) \cdot \frac{5}{2}y^2$

## Integrabilitätsbedingungen

Der Satz von Schwarz: Die Reihenfolge der Partiellen Ableitungen spielt (meistens) keine Rolle. $f_{xxy}(x,y) = f_{xyx}(x,y)$

Integrabilitätsbedinungen: Gegeben zwei Funktionen $\phi$ und $\psi$ die als erste Ableitungen einer unbekannten Funktion definiert sind. Also : $\phi = f_x$ und $\psi = f_y$. Die Übergeordnete Funktion $f(x,y)$ existiert genau dann, wenn gilt: $\phi_y = \psi_x$.

Vorgehen um $f(x,y)$ zu finden:

1. Integrabilitätsbedinungen überprüfen. Wenn $\phi_y \neq \psi_x$, so existiert keine Funktion $f(x,y)$.
2. Die Integrale $\int \phi \, dx$ und $\int \psi \, dy$ lösen. ACHTUNG: Konstanten hängen von anderen Variablen ab.
3. Die Funktion $f(x,y)$ zusammensetzen.

Beispiel: Berechne die Funktion $f(x,y)$ für

$$\phi = e^{4x} + 5xy^2 \,\text{und}\, \psi = sin(y) + 5x^2y$$

## Linearisierung

Lineare Ersatzfunktion:

$$t : (x, y) \longrightarrow f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Der Graph $\Gamma(t)$ bildet die Tangentialebene von f an der Stelle $(x_0, y_0)$ :

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Beispiel: Berechne die Tangentialebene von $f(x, y) = 3x^2 + 2y + 1$ in (1,1)

Beispiel: Wie lautet die Lineare Ersatzfunktion im Punkt (0,$\pi$) der Funktion

$$f(x, y) = sin(x) + \frac{y^2}{\pi}$$

## Fehlerrechnung

Die Funktion wird in der Nähe des Stützpunkts durch das Totale Differential linearisiert. Für kleine Distanzen vom Stützpunkt gilt die Approximation $\Delta f \approx df$. Dies ist jedoch mit einem (absoluten und relativen) Fehler verknüpft, der von den einzelnen Grössen (Variablen) unterschiedlich stark abhängt. Ziel ist es, den Fehler sowie den Einfluss der einzelenen Grössen auf diesen zu berechnen.

Totales Differential: $df = f_x(x_0, y_0) \cdot dx + f_y(x_0, y_0) \cdot dy$

Absoluter Messfehler: $df$

Relativer Messfehler: $\frac{df}{f}$

Vorgehen zum Lösen einer Fehlerrechnung:

1. Totales Differential der Funktion bilden.
2. Falls nach dem absoluten Fehler gefragt ist, können direkt absolute Werte für $dx$ & $dy$ in das Totale Differential eingesetzt werden.
3. Falls nach dem relativen Fehler gefragt ist, muss das Totale Differential durch die Funktion geteilt werden.
4. Der erhaltene Bruch umformen und versuchen Terme wie $\frac{dx}{x}$ & $\frac{dy}{y}$ zu erzeugen und dort die relative Fehler einsetzen (Prozentzahlen).

Beispiel: (SC Basisprüfung Sommer 2017)

4. **Single Choice.** Die Funktion $f$ sei definiert durch

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2.$$

Wie lautet das totale Differential $df$ von $f$?

(a) $x^2\,dx + y^2\,dy$

(b) $2x\,dx + 2y\,dy$

(c) $xy\,dx + xy\,dy$

Beispiel: Basisprüfung Sommer 2017

**Offene Aufgabe.** Es bezeichne $I$ das Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}\times I \to \mathbb{R}$ werde durch

$$f(x, y) = x\tan(y)$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in I$ definiert.

(a) Bestimmen Sie im Punkt $\left(2, \frac{\pi}{4}, 2\right)$ die Tangentialebene an den Graphen $\Gamma(f)$ von $f$.

(b) Zeigen Sie, unter der Annahme, dass das totale Differential $df$ eine Abschätzung für den absoluten Fehler $\Delta f$ ist, dass

$$\frac{\Delta x}{x} + \frac{2\Delta y}{\sin(2y)}$$

eine Abschätzung für den relativen Fehler $\Delta f/f$ ist.

(c) Eine Methode um den Höhenunterschied zwischen dem aktuellen Standort und einer Bergspitze zu messen ist, den Winkel $\theta$ zur Bergspitze und die Entfernung $l$ zum (gedachten) Fußpunkt des Berges zu messen (siehe Abbildung unten).

Dann berechnet sich der Höhenunterschied $h$ als $h = f(l, \theta)$. Wir nehmen an, dass wir $\theta$ mit einer Genauigkeit von $1^\circ$ und $l$ mit einer Genauigkeit von $1\%$ messen können. Verwenden Sie (b), um eine obere Schranke $M$ für den relativen Fehler $\Delta h/h$ zu finden. Zeigen Sie weiter, dass gilt:

$$M \geq \frac{1}{100} + \frac{\pi}{90}.$$