# Übungsstunde 2

## Extremalwerte auf einem Gebiet

Globale Extrema

- $f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \longrightarrow (x_0, y_0)$ ist eine **globale Maximalstelle** und $f(x_0, y_0)$ ein **globales Maximum**.
- $f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \longrightarrow (x_0, y_0)$ ist eine **globale Minimalstelle** und $f(x_0, y_0)$ ein **globales Minimum**.

Lokale Extrema auf einem Teilgebiet D:

- $f(x, y) \leq f(x_0, y_0),\ (x, y) \in D \longrightarrow (x_0, y_0)$ ist eine **lokale Maximalstelle** und $f(x_0, y_0)$ ein **lokales Maximum**.
- $f(x, y) \geq f(x_0, y_0),\ (x, y) \in D \longrightarrow (x_0, y_0)$ ist eine **lokale Minimalstelle** und $f(x_0, y_0)$ ein **lokales Minimum**.

Zu untersuchende Stellen:

- Extrema im Inneren des Gebiets $\longrightarrow grad(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Kandidaten auf dem Rand des Gebiets $\longrightarrow$ Parametrisierung $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
- Eckpunkte des Gebiets
- Definitionslücken der partiellen Ableitungen

Relation zur Tangentialebene:

Die Tangentialebene in einer Extremalstelle ist identisch zum Funktionswert im Stützpunkt und konstant.

Explizites Vorgehen:

**Extrema auf einem Gebiet** **Fota S.55+S65**

1. Gebiet skizzieren
2. Kandidatensuche im Innern
   - 2.1 $grad(f) = (f_x, f_y) = (0, 0)$
   - 2.2 Löse nach $(x, y)$ auf
   - 2.3 überprüfe, ob Kandidat in A liegt
3. Kandidatensuche auf Randkurve
   - A) Parmetrisierung:
     - 3.1 Parametrisiere die Randkurve $K_i$
       $\Rightarrow \vec{r}1 : [a_i, b_i] \to K_i$
     - 3.2 setze Parametrisierung in $f$ ein
     - 3.3 setze Ableitung gleich Null:
       $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}_i(t)) = 0$
   - B) Lagrangemultiplikatoren (für Gebiet $g(x, y, z) = C$):
     Löse Gleichungssystem: $\begin{vmatrix} grad(f) = \lambda * grad(g) \\ g(x, y, z) = C \end{vmatrix}$
4. Eckpunkte sind Kandidaten:
   - 4.1 Setze Ecken in $f(x, y)$ ein
5. Definitionslücken der part. Abl. sind Kandidaten
6. Vergleiche die Funktionswerte der Kandidaten

Multiple Choice Basisprüfung 2017:

**Multiple Choice.** *Die folgenden neun Aufgaben sind Multiple Choice-Aufgaben. Jede der Multiple Choice-Aufgaben besteht aus drei Teilaufgaben, die Sie auf dem Antwortblatt jeweils mit wahr oder falsch beantworten können. Wird eine Teilaufgabe richtig beantwortet, gibt es* 2 *Punkte, bei falscher Beantwortung* $-2$ *Punkte und bei Nichtbeantwortung* 0 *Punkte. Ist die Gesamtpunktezahl über alle Multiple Choice-Aufgaben negativ, so wird sie auf* 0 *Punkte aufgerundet.*

19. Es sei $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und es seien $x_0$, $y_0 \in [0,1]$. Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese wahr ist!

    (a) Ist $(x_0, y_0)$ eine globale Maximalstelle von $f$, so gilt $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

    (b) Falls $f_x(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) = 0$ beide gelten, so ist $(x_0, y_0)$ eine lokale Maximal- oder eine lokale Minimalstelle.

    (c) Es seien $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ und $v\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, sodass $f(x,y) = u(x)v(y)$ gilt. Ist $x_0$ eine Maximalstelle von $u$ und $y_0$ eine Maximalstelle von $v$, so ist $(x_0, y_0)$ eine Maximalstelle von $f$.

Multiple Choice Basisprüfung 2018

5. **Single Choice.** Die Funktion $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = xy(x-1)(y-1).$$

Wo liegt das globale Maximum von $f$?

(a) Am Rand des Einheitsquadrats, aber nicht auf einer der beiden Koordinatenachsen.

(b) Auf einer der beiden Koordinatenachsen.

(c) Im Innern des Einheitsquadrats.

*Hinweis:* $f_x$ und $f_y$ müssen nicht berechnet werden um die Single Choice Aufgabe zu lösen.

Offene Aufgabe Basisprüfung Sommer 2021

2. Bestimmen Sie die globalen Maximal- und Minimalstellen der Funktion

$$f(x,y) = y^2 - xy^2 + x - 1$$

im abgeschlossenen Gebiet $B$, welches in der linken Halbebene durch die Kurve $x+1=y^2$ und in der rechten Halbebene durch die Kurve $x^2+y^2=1$ berandet wird.

*Klarstellung:* $B$ ist hier inklusive Rand gemeint.

## Verallgemeinerte Kettenregel

Die Ableitung einer Funktion mit parametrisierten Variablen lautet:

$$F'(t) = grad(f(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)$$

Beispiel: Berechne mittels der allgemeinen Kettenregel die Ableitung von

$$f(x, y) = ln(x) + e^y + 2 \;\text{ mit }\; x(t) = t^3, \;\; y(t) = ln(t)$$