

Übungsstunde 2

Extremalwerte auf einem Gebiet

Globale Extrema

- $f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \longrightarrow (x_0, y_0)$ ist eine **globale Maximalstelle** und $f(x_0, y_0)$ ein **globales Maximum**.
- $f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \longrightarrow (x_0, y_0)$ ist eine **globale Minimalstelle** und $f(x_0, y_0)$ ein **globales Minimum**.

Lokale Extrema auf einem Teilgebiet D:

- $f(x, y) \leq f(x_0, y_0), (x, y) \in D \longrightarrow (x_0, y_0)$ ist eine **lokale Maximalstelle** und $f(x_0, y_0)$ ein **lokales Maximum**.
- $f(x, y) \geq f(x_0, y_0), (x, y) \in D \longrightarrow (x_0, y_0)$ ist eine **lokale Minimalstelle** und $f(x_0, y_0)$ ein **lokales Minimum**.

Zu untersuchende Stellen:

- Extrema im Inneren des Gebiets $\longrightarrow \text{grad}(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Kandidaten auf dem Rand des Gebiets $\longrightarrow$ Parametrisierung $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
- Eckpunkte des Gebiets
- Definitionslücken der partiellen Ableitungen

Relation zur Tangentialebene:

die Tangentialebene in einer Extremalstelle ist identisch zum Funktionswert im Stützpunkt und konstant.

Explizites Vorgehen:

Extrema auf einem Gebiet

Fota S.55+S65

1. Gebiet skizzieren
2. Kandidatensuche im Innern
 - 2.1 $\text{grad}(f) = (f_x, f_y) = (0, 0)$
 - 2.2 Löse nach (x, y) auf
 - 2.3 überprüfe, ob Kandidat in A liegt
3. Kandidatensuche auf Randkurve
 - A) Parametrisierung:
 - 3.1 Parametrisiere die Randkurve K_i

$$\Rightarrow \vec{r}_i : [a_i, b_i] \rightarrow K_i$$
 - 3.2 setze Parametrisierung in f ein
 - 3.3 setze Ableitung gleich Null:

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}_i(t)) = 0$$
 - B) Lagrangemultiplikatoren (für Gebiet $g(x, y, z) = C$):

Löse Gleichungssystem:
$$\begin{cases} \text{grad}(f) = \lambda * \text{grad}(g) \\ g(x, y, z) = C \end{cases}$$
4. Eckpunkte sind Kandidaten:
 - 4.1 Setze Ecken in $f(x, y)$ ein
5. Definitionslücken der part. Abl. sind Kandidaten
6. Vergleiche die Funktionswerte der Kandidaten

Multiple Choice Basisprüfung 2017:

Multiple Choice. Die folgenden neun Aufgaben sind Multiple Choice-Aufgaben. Jede der Multiple Choice-Aufgaben besteht aus drei Teilaufgaben, die Sie auf dem Antwortblatt jeweils mit wahr oder falsch beantworten können. Wird eine Teilaufgabe richtig beantwortet, gibt es 2 Punkte, bei falscher Beantwortung -2 Punkte und bei Nichtbeantwortung 0 Punkte. Ist die Gesamtpunktzahl über alle Multiple Choice-Aufgaben negativ, so wird sie auf 0 Punkte aufgerundet.

19. Es sei $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und es seien $x_0, y_0 \in [0, 1]$. Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese wahr ist!
 - (a) Ist (x_0, y_0) eine globale Maximalstelle von f , so gilt $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.
 - (b) Falls $f_x(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) = 0$ beide gelten, so ist (x_0, y_0) eine lokale Maximal- oder eine lokale Minimalstelle.
 - (c) Es seien $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ und $v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, sodass $f(x, y) = u(x)v(y)$ gilt. Ist x_0 eine Maximalstelle von u und y_0 eine Maximalstelle von v , so ist (x_0, y_0) eine Maximalstelle von f .

Lösung:

Alle Antworten sind falsch. a) kann nicht gelten, da es auch Extremalstellen in Punkten gibt, in denen die partiellen Ableitungen nicht definiert sind. b) ist falsch, da es sich noch um einen Sattelpunkt handeln kann. c) kann nicht gelten, da beispielsweise u und v negative Werte annehmen können, welche miteinander multipliziert positive Werte ergeben, die unter Umständen grösser als das Maximum der jeweiligen Funktionen sein können.

Multiple Choice Basisprüfung 2018

5. **Single Choice.** Die Funktion $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) = xy(x - 1)(y - 1).$$

Wo liegt das globale Maximum von f ?

- (a) Am Rand des Einheitsquadrats, aber nicht auf einer der beiden Koordinatenachsen.
- (b) Auf einer der beiden Koordinatenachsen.
- (c) Im Innern des Einheitsquadrats.

Hinweis: f_x und f_y müssen nicht berechnet werden um die Single Choice Aufgabe zu lösen.

Offene Aufgabe. Die Funktion f werde durch

$$f(x, y) = \exp(x^3 - 2x^2 - 2y^2 + 2y)$$

Lösung

Die Antwort c) ist korrekt, da auf den Koordinatenachsen entweder $x = 0$ oder $y = 0$ gilt, was beide zu $f(x, y) = 0$ führt. Dasselbe Resultat erhält man auch auf den anderen Rändern bei denen $x = 1$ oder $y = 1$ gilt. Im Inneren kann die Funktion Werte grösser als 0 annehmen, zum Beispiel für $x = y = 0.5$ mit $f(0.5, 0.5) = \frac{1}{16}$. Daher muss das Maximum im Inneren liegen.

2. Bestimmen Sie die globalen Maximal- und Minimalstellen der Funktion

$$f(x, y) = y^2 - xy^2 + x - 1$$

im abgeschlossenen Gebiet B , welches in der linken Halbebene durch die Kurve $x + 1 = y^2$ und in der rechten Halbebene durch die Kurve $x^2 + y^2 = 1$ berandet wird.

Klarstellung: B ist hier inklusive Rand gemeint.

Lösung:

Extrema Suche im Inneren:

Wir berechnen den $\text{grad}(f)$ und setzen ihn gleich $(0,0)$.

$$\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} 1 - y^2 \\ 2y - 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt die Punkte $P_1(1,1)$ & $P_2(1,-1)$. Keiner dieser Punkte liegt im Gebiet B und daher können diese Punkte wieder verworfen werden.

Extrema Suche auf dem Rand:

Für den Rand betrachten wir zuerst den halben Einheitskreis auf der rechten Halbebene. Dieser kann entweder mit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ $t \in [0, 2\pi]$ oder mit $1 = x^2 + y^2$ parametrisiert werden.

Bei der zweiten Variante kann man y^2 mit $1 - x^2$, $x \in [0, 1]$ in der Funktionsgleichung ersetzen. Dies führt zu der Funktion $f(x) = x^3 - x^2$. Wir berechnen die Ableitung und setzen diese gleich Null:

$$f'(x) = x(3x - 2) = 0$$

Dies ergibt uns die Punkte $P_3(0,1)$, $P_4(0,-1)$, $P_5(\frac{2}{3}, \sqrt{5/9})$. Des Weiteren ist es nötig, die Ränder der Parametrisierung auszuwerten: Die Punkte für $x = 0$ haben wir bereits gefunden; für $x = 1$ ergibt sich der Punkt $P_6(1,0)$.

Nun zu der Kurve auf der linken Halbebene. Diese nach links geöffnete Parabel kann folgendermassen parametrisiert werden:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [-1, 1]$$

Wird diese Parametrisierung in die Funktion eingesetzt, erhält man: $f(\vec{r}(t)) = 3t^2 - t^4 - 2$. Wir leiten diese Funktion wiederum ab und setzen sie gleich Null:

$$f'(\vec{r}(t)) = t(6 - 4t^2) = 0$$

Dies ist für $t = 0$ und $t = \pm\sqrt{3/2}$ erfüllt. Für $t = 0$ erhalten wir den Punkt $P_7(-1, 0)$. Die Werte $t = \pm\sqrt{3/2}$ liegen nicht in unserem Definitionsintervall und werden deswegen nicht weiter berücksichtigt. Die Randpunkte der Parametrisierung müssen nicht mehr explizit evaluiert werden, da es sich um dieselben Randpunkte wie beim Einheitskreis handelt.

Eckpunkte und Punkte in denen die Partiellen Ableitungen nicht definiert sind

Es wurden die Punkte $(0, \pm 1)$ bereits untersucht und die partiellen Ableitungen sind stetig. Daher gibt es keine weiteren Punkte zu untersuchen.

Zusammenfassung Als Letztes gilt es noch die Funktionswerte der Kandidaten zu vergleichen. Wir erhalten:

- $f(P_3) = 0$
- $f(P_4) = 0$
- $f(P_5) = -\frac{4}{27}$
- $f(P_6) = 0$
- $f(P_7) = -2$

Zusammenfassend haben wir drei globale Maximalstellen in den Punkten P_3 & P_4 & P_6 sowie eine globale Minimalstelle im Punkt P_7

Verallgemeinerte Kettenregel

Die Ableitung einer Funktion mit parametrisierten Variablen lautet:

$$F'(t) = \text{grad}(f(\vec{r}(t))) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)$$

Beispiel: Berechne mittels der allgemeinen Kettenregel die Ableitung von

$$f(x, y) = \ln(x) + e^y + 2 \quad \text{mit} \quad x(t) = t^3, \quad y(t) = \ln(t)$$

Lösung:

Wir berechnen den Gradient von $f(x, y)$:

$$\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ e^y \end{pmatrix}$$

Anschliessend berechnen wir noch $\dot{\vec{r}}$:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

Die Ableitung der Parametrisierten Funktion ist nun gegeben als:

$$f'(\vec{r}(t)) = \frac{1}{t^3} \cdot 3t^2 + e^{\ln(t)} \cdot \frac{1}{t} = \frac{3}{t} + 1$$