ANALYSIS II

Übungsstunde IX

Ablauf

- Intuitionsübung
- Nachbesprechung Serie 8
- Differentialgleichungen
  - Einführung
  - Richtungsfeld
  - Existenzsatz
  - Feldlinien von Vektorfeldern
  - Separation der Variablen

Intuitionsübung

Wir haben in der Vorlesung einige Zusammenhänge zwischen Vektorfelder, Potentialen und Arbeitsintegralen gesehen:

- Satz: Ein Vektorfeld ist genau dann konservativ, wenn die Arbeit entlang aller geschlossenen Wege 0 ist;
- Satz: Ein Vektorfeld ist genau dann konservativ, wenn es ein Potentialfeld ist.

In dieser Übung wollen wir ein Vektorfeld mit speziellen Eigenschaften betrachten und anschauen, wie das in die allgemeine Theorie passt.

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ -\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad D(\vec{v}) = \{(x,y,z) \mid (x,y) \neq (0,0)\}.$$

- Dieses Vektorfeld ist also ausserhalb der z-Achse überall definiert.
- Es ist **wirbelfrei**: $\operatorname{rot} \vec{v} \equiv \vec{0}$.
- Das Vektorfeld **zeigt ausserdem überall direkt zur z-Achse** hin, jeweils parallel zur xy-Ebene.
- Das **Arbeitsintegral entlang eines Kreises** mit Mittelpunkt in der z-Achse, der ausserdem parallel zur xy-Ebene liegt, ist **immer 0**: Das Vektorfeld $\vec{v}$ steht dann senkrecht auf dem Tangentialvektor $\dot{\vec{r}}$, also ist $\vec{v} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$.

Wir wollen zeigen, dass das Vektorfeld tatsächlich konservativ ist. Dazu müssen wir zeigen, dass alle Arbeitsintegrale entlang geschlossener Wege 0 sind, nicht nur für die achsenparallelen Kreise.

Nehmen Sie sich **3 Minuten Zeit** für folgende Aufgabe:

- Wählen Sie einen beliebigen geschlossenen Weg in $D(\vec{v})$.
- Entscheiden Sie, ob Ihr Weg um die z-Achse herumführt oder nicht.
- Begründen Sie, weshalb das Arbeitsintegral auch für Ihren Weg 0 ergibt.

Intuitionsübung

Zur Erinnerung: Gegeben sei das Vektorfeld

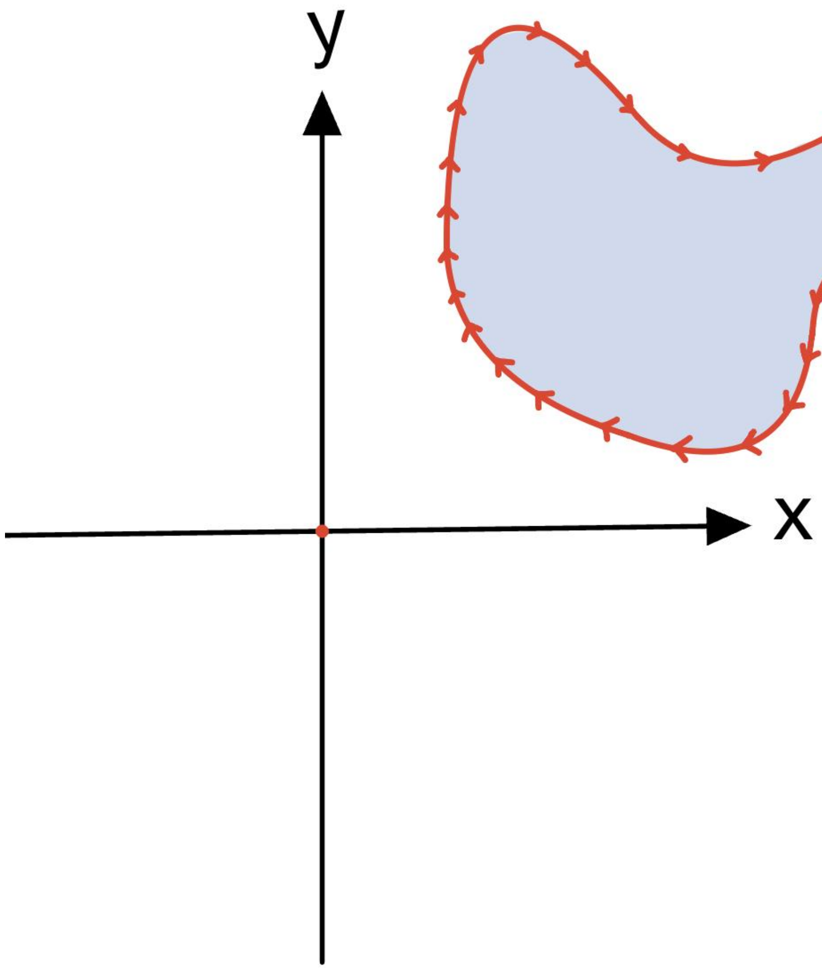
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ -\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad D(\vec{v}) = \{(x,y,z) \mid (x,y) \neq (0,0)\}.$$

- Dieses Vektorfeld ist also ausserhalb der z-Achse überall definiert.
- Es ist **wirbelfrei**: $\operatorname{rot} \vec{v} \equiv \vec{0}$.
- Das Vektorfeld **zeigt ausserdem überall direkt zur z-Achse** hin, jeweils parallel zur xy-Ebene.
- Das **Arbeitsintegral entlang eines Kreises** mit Mittelpunkt in der z-Achse, der ausserdem parallel zur xy-Ebene liegt, ist **immer 0**: Das Vektorfeld $\vec{v}$ steht dann senkrecht auf dem Tangentialvektor $\dot{\vec{r}}$, also ist $\vec{v} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$.

Auftrag:

- Tun Sie sich nun mit jemandem zusammen und erklären Sie der zweiten Person, weshalb das Arbeitsintegral bei Ihnen 0 ergeben muss.
- Betrachten Sie die verwendeten Argumente: Gibt es unterschiedliche Begründungen, je nachdem ob der Weg um die z-Achse herumführt oder nicht? Weshalb?
- Falls Sie beide die gleiche Art Weg gewählt (um z-Achse, oder nicht) haben, untersuchen Sie die andere Art und begründen Sie möglichst effizient, warum das Wegintegral dort auch 0 ergibt.

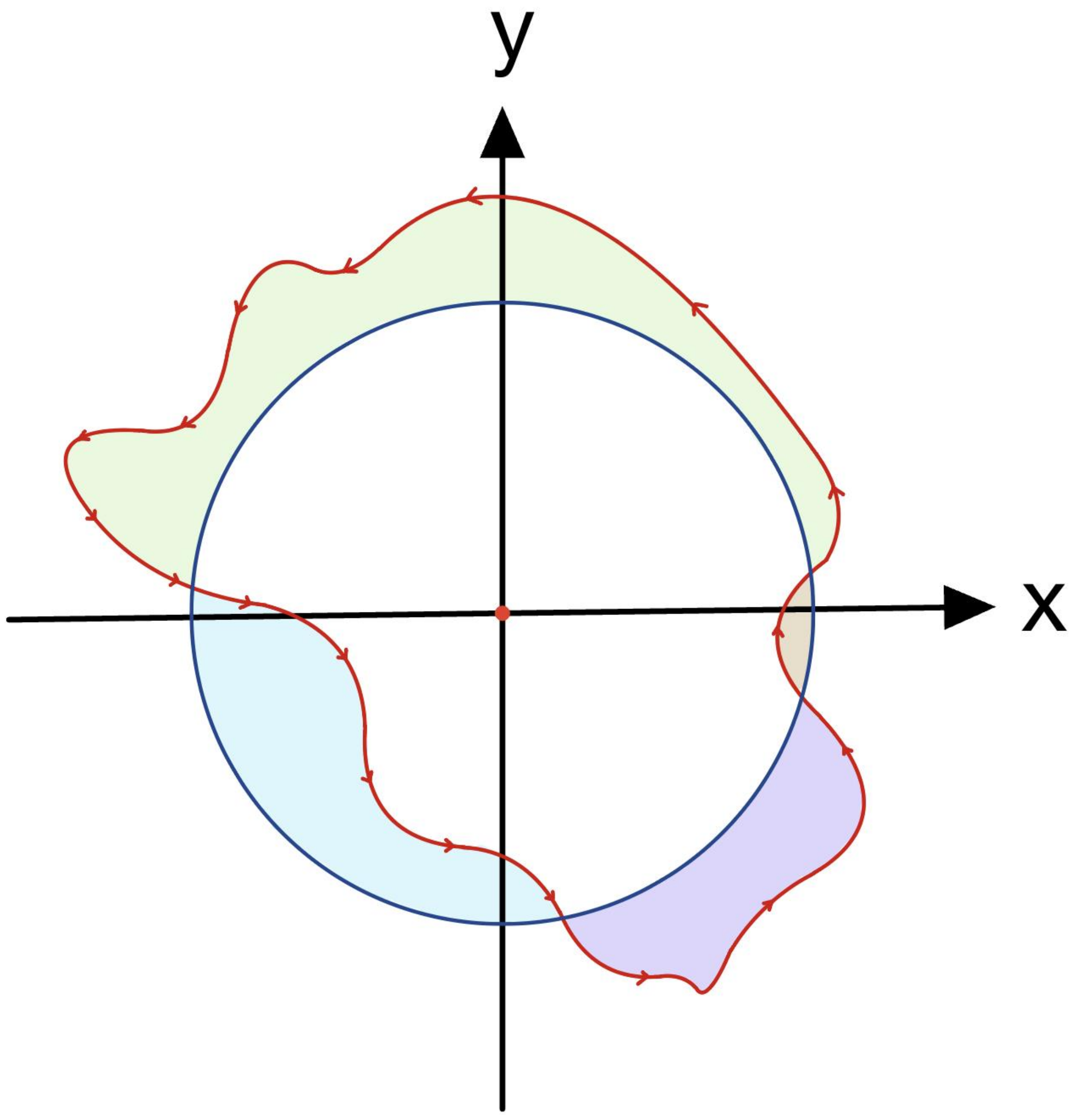
Nehmen Sie sich **4 Minuten Zeit** für diese Aufgaben.



Variante 1

- Die Arbeit entlang eines Wegs, der in einem einfach-zusammenhängenden Teil des Vektorfelds verläuft ist immer Null, da $rot(\vec{v}) = 0$ gilt.

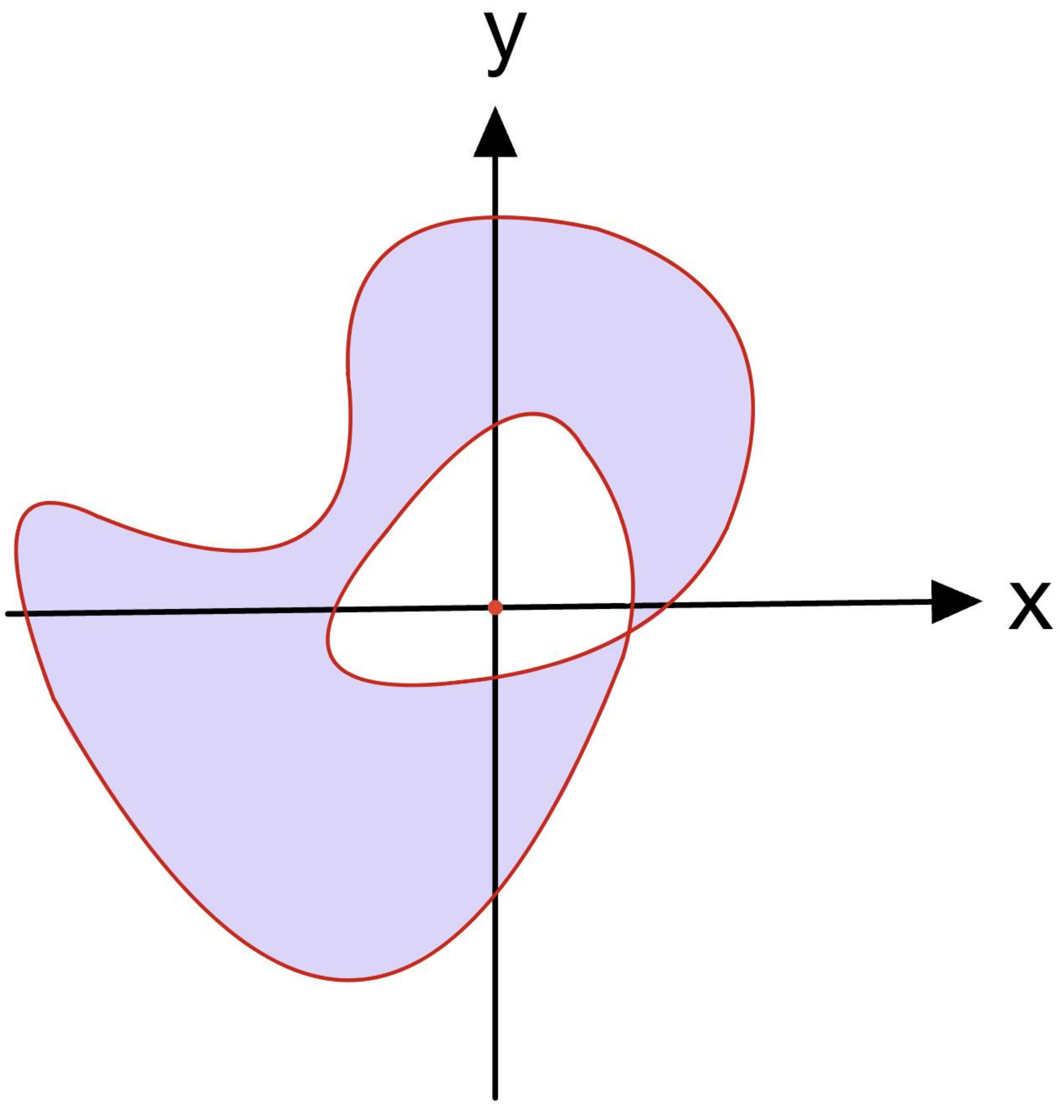
→ Der Weg kann problemlos auf einen Punkt zusammengezogen werden.



Variante 2

- Der Weg umschliesst den Punkt, indem das Vektorfeld nicht einfach zusammenhängend ist.
- Wir zeichnen den Kreis ein, für den die Arbeit = 0 ist.
- Einerseits kann jeder Weg um den Punkt (0,0) damit in Teilflächen unterteilt werden, für die wiederum die Arbeit verschwindet.
- Jede Teilfläche ist durch ein Wegstück entlang des Kreises beschränkt und ein Stück entlang unseres Pfads.

  Da $rot(\vec{v}) = 0 = \int_K \vec{v} \cdot d\vec{r} + \int_P \vec{v} \cdot d\vec{r}$ und $\int_K \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$ gilt, muss $\int_P \vec{v} \cdot d\vec{r}$ auch identisch Null sein.



Variante 3

- Der Weg windet sich mehrmals um die z-Achse.
- Hierbei kann die Kurve wieder in Flächen aufgeteilt werden, die von dem Pfand begrenz werden und sich on einem einfach zusammenhängenden Abschnitt des Vektorfelds befinden.
- Generell gilt: weist der Pfad auch noch eine z-Komponente auf, spielt dies keine Rolle, da sich das Vektorfeld nur in der xy-Ebene befindet. Die z-Komponente trägt nie zur Arbeitsberechnung bei.

Wie lautet das Potential des Potentialfelds?

$$\int v_1 dx = \int -\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{dx} = (\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)^{-1/2} + \mathrm{C(y)}$$

$$\int v_2 dy = \int -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{dx} = (\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)^{-1/2} + \mathrm{C(x)}$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + C$$

Nachbesprechung Serie 8

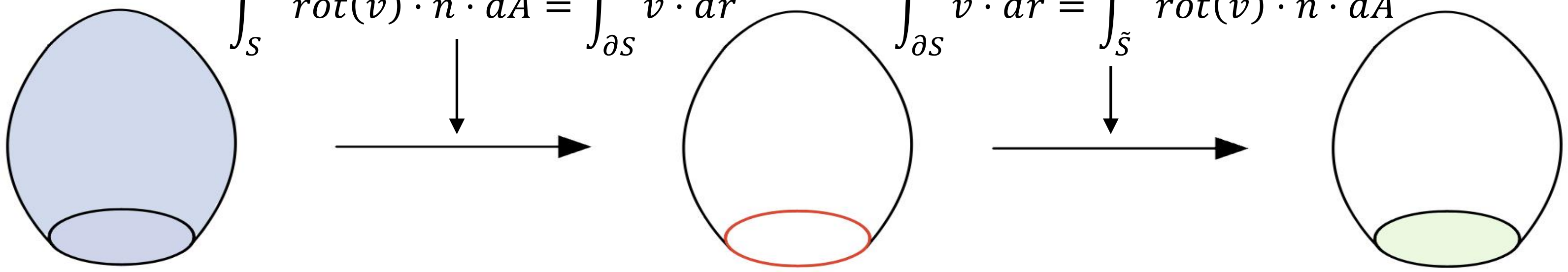
4. (a) Berechnen Sie das Integral $\Phi = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$, wobei $\vec{F}(x,y,z) = (yz, -xz, xy)$ ist und

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 8z^2 = 1, z \geq 0\},$$

einen Teil der Oberfläche des Ellipsoids bezeichnet. Die Normale zeigt nach oben.
Benutzen Sie dazu den Satz von Stokes zweimal (einmal in jede Richtung), um das Integral über die Fläche S in ein Integral über eine Fläche $\widetilde{S}$ umzuformen, welches einfacher zu berechnen ist.

(b) Benutzen Sie den Satz von Stokes, um Φ via Wegintegral zu berechnen.

$$\int_S rot(\vec{v}) \cdot \vec{n} \cdot dA = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{r} \qquad \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{\tilde{S}} rot(\vec{v}) \cdot \vec{n} \cdot dA$$



DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Kapitel VII

Differentialgleichungen

Differentialgleichungen: Gleichungen, die Funktionen und deren Ableitungen enthalten.

Eine “normale“ Gleichungen wird für eine konstanten skalaren Wert gelöst:

$$x - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 5$$

Von nun an möchten wir Gleichungen für Funktionen lösen und nicht für einzelne skalare Werte:

$$x(t) = \dot{x}(t) \rightarrow x(t) = e^t$$

$$x(t) = \ddot{x}(t) \rightarrow x(t) = e^t, \mathrm{sinh(t)}, \mathrm{cosh(t)}$$

$$x(t) = -\ddot{x}(t) \rightarrow x(t) = \sin(t), \cos(t)$$

Uneindeutigkeit der Lösung

Betrachten wir nochmal die DGL $x(t) = \dot{x}(t)$ so sehen wir, dass die nicht nur die Funktion $x(t) = e^t$ die Gleichung löst sondern auch die Funktion $x(t) = 5 \cdot e^t$ oder $x(t) = 2023 \cdot e^t$

Jede Funktion $C \cdot e^t,\ C \in \mathbb{R}$ löst diese DGL.

$\Rightarrow$ Die Lösung $C \cdot e^t,\ C \in \mathbb{R}$ wird die allgemeine Lösung genannt

Eine Lösung für ein spezifisches $C \in \mathbb{R}$ wird spezielle Lösung genannt. Das spezifische C geht dabei aus dem Anfangswertproblem (AWP) hervor.

Wählen wir zum Beispiel für unsere Lösung die zusätzliche Bedingung $x(0) = 5$ und wenden diese auf unsere allgemeine Lösung an, folgt $x(0) = 5 = C \cdot e^0 \Rightarrow C = 5$

$x(t) = C \cdot e^t, \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung zur DGL $x(t) = \dot{x}(t)$

$x(t) = 5 \cdot e^t$ ist die spezielle Lösung zur DGL $x(t) = \dot{x}(t)$ mit dem AWP $x(0) = 5$

Arten von Differentialgleichungen & Ausblick

Gewöhnliche Differentialgleichungen / DGL / ODE (ordinary differential equation):

- Die Lösungen, die gesucht werden sind Funktionen einer Variable x(t) zu einer Gleichung $F\left(t,\ x(t), x', x'', \dots, x^{(n)}\right) \equiv 0$

Analysis II & viele weitere Fächer

Partielle Differentialgleichungen / PDE (partial differential equations):

- Die Lösungsfunktion beinhaltet (mindestens) zwei Variablen u(x,t)

  $\text{Bsp: } \Delta u = 0$ (mehrdimensionale Laplace-Gleichung)

Teil von Analysis III

Spezielle Differentialgleichungen:

- Beispielsweise Schrödingergleichung: PDE gekoppelt mit einem Eigenwertproblem

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r}, t)\right]\psi(\vec{r}, t)$$

Quant. Mech.

Charakterisierung von DGL's

Die Ordnung der DGL ist identisch zur höchsten vorkommenden Ableitung

Bsp: $x + c - \dot{x} = \ddot{x} + ab^3 \rightarrow inhomogene\ DGL\ 2. Ordnung$

Das Richtungsfeld einer DGL 1. Ordnung:

Eine DGL 1. Ordnung hat die Form $F\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) \equiv 0$

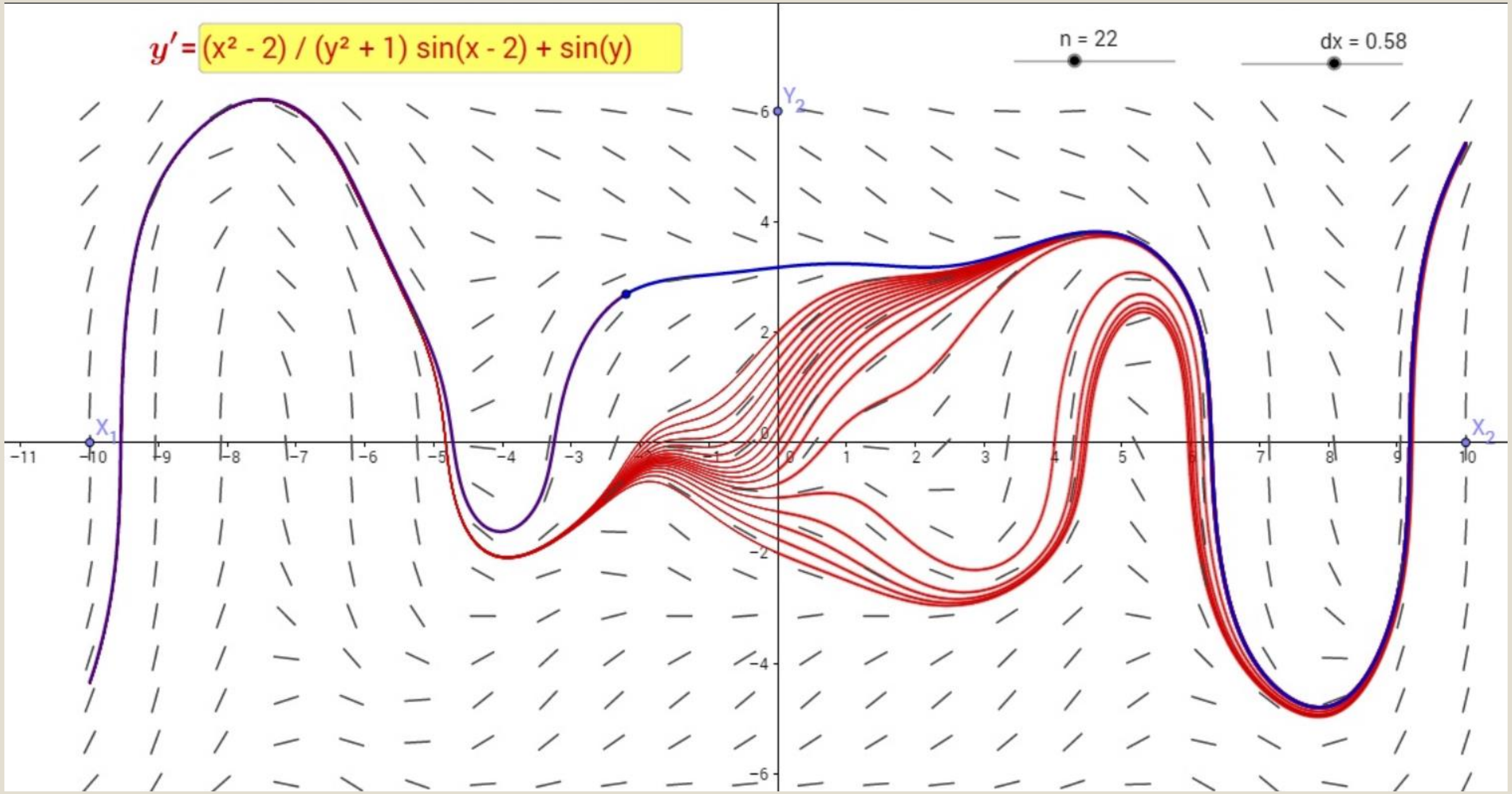
Unter der Annahme, dass dies nach $\dot{x}(t)$ umgeformt werden kann erhält man:

$$\dot{x}(t) = \mathrm{f}\big(\mathrm{t}, \mathrm{x}(\mathrm{t})\big)$$

Zeichnet man $\dot{x}(t)$ für verschiedene (t_0, x_0) auf, erhält man das Richtungsfeld der DGL

(Für die Allgemeine Lösung)

Beispiel Richtungsfeld



https://mathematikaktuellundkurios.wordpress.com/2016/06/09/differentialgleichung-und-richtungsfeld/

Existenzsatz

Satz (Existenzsatz). *Sei $f(x,y)$ stetig und nach y partiell stetig differenzierbar. Dann gibt es für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D(f)$ genau eine Funktion $y(x)$ mit*

$$y' = f(x,y) \qquad \textit{und} \qquad y(x_0) = y_0.$$

Jedes AWP hat eine eindeutige Lösung → $x(t) = 5 \cdot e^t$ ist die einzige Funktion, die die DGL $x(t) = \dot{x}(t)$ mit dem AWP $x(0) = 5$ löst.

Graphen von verschiedenen AWP's sind entweder identisch oder disjunkt (besitzen keine gemeinsamen Elemente)

Insbesondere schneiden sich die Graphen nicht – Die Kurvenscharen sind regulär

Reguläre Lösungsschaaren beschreiben Feldlinien von Vektorfeldern

SC Basisprüfung Winter 2020

24. (VII) Die Differentialgleichung $y' = f(x,y) := 3\sqrt[3]{y^2}$ besitzt die zwei verschiedenen Lösungskurven $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 0$, die durch den Punkt $(0,0)$ laufen. Wie üblich sei $D(f)$ so gross wie möglich definiert. Warum ist dies *kein* Widerspruch zur Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen erster Ordnung?

(a) $(0,0)$ liegt am Rand von $D(f)$.

(b) f ist nicht auf ganz $D(f)$ nach x stetig partiell differenzierbar.

(c) Für die zwei Lösungen y_1, y_2 kann $y_1(0) = y_2(0)$ gelten, solange $y_1'(0) \neq y_2'(0)$.

(d) f ist nicht auf ganz $D(f)$ nach y stetig partiell differenzierbar.

SC Basisprüfung Winter 2020

24. (VII) Die Differentialgleichung $y' = f(x,y) := 3\sqrt[3]{y^2}$ besitzt die zwei verschiedenen Lösungskurven $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 0$, die durch den Punkt $(0,0)$ laufen. Wie üblich sei $D(f)$ so gross wie möglich definiert. Warum ist dies *kein* Widerspruch zur Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen erster Ordnung?

(a) $(0,0)$ liegt am Rand von $D(f)$.

(b) f ist nicht auf ganz $D(f)$ nach x stetig partiell differenzierbar.

(c) Für die zwei Lösungen y_1, y_2 kann $y_1(0) = y_2(0)$ gelten, solange $y_1'(0) \neq y_2'(0)$.

(d) f ist nicht auf ganz $D(f)$ nach y stetig partiell differenzierbar.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot y^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{y^{\frac{1}{3}}} \rightarrow \text{in } (0,0) \text{ nicht definiert}$$

Feldlinien eines Vektorfelds finden

Feldlinien

Feldlinien eines Vektorfeldes $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow y' = \frac{v_2}{v_1}$

Lösung der DGL ergeben die Feldlinien

Beispiel:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ y^2 x + y^2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{wie lauten die Feldlinien dieses Vektorfelds?}$$

Lösung

Laut der Formel setzen wir:

$$y' = \frac{y^2 x + y^2}{y} \iff \mathrm{yx + y} \iff \mathrm{y(x+1)}$$

Wir separieren die Variablen: $y' \cdot \frac{1}{y} = x + 1$

Setze $\frac{1}{y(x)} := h(y)$ & integriere auf beiden Seiten:

Wir erhalten die Gleichung: $\int h(y) \cdot y' \, dx = \int x + 1 \, dx$

Wir können y' als $\frac{dy}{dx}$ schreiben $\Rightarrow \int h(y) \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx = \int x + 1 \, dx$

Integration auf beiden Seiten liefert: $\int \frac{1}{y} dy = \int (x+1) \, dx \rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + x + C$

Umformen ergibt: $y = A \cdot e^{\frac{1}{2}x^2 + x} \; mit \; A = e^C$

Methode der Separation der Variablen

Bei einer separierbaren DGL können die Variablen getrennt werden.

$$h(y, y') = g(x)$$

Die Differentialgleichungen besitzen die Form $f(x, y) = \frac{g(x)}{h(y)} \rightarrow \text{DGL}$ separierbar

Lösung einer separierbaren DGL $y' = \frac{g(x)}{h(y)}$: $\quad h(y) \cdot y' = g(x)$

Auf beiden Seiten nach x integrieren und y' als $\frac{dy}{dx}$ schreiben liefert: $\int h(y)\, dy = \int g(x)\, dx$

Diese Integrale lösen und Resultat nach y umformen.

Beispiel zum ausprobieren

Wie lautet die Lösung der separierbaren DGL $y' - \frac{x^2}{y} = 0$?

Beispiel zum ausprobieren

Wie lautet die Lösung der separierbaren DGL $y' - \frac{x^2}{y} = 0$?

Separation der Variablen: $y' \cdot y = x^2$

Integration: $\int y\, dy = \int x^2\, dx \rightarrow \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{3} x^3 + C \rightarrow y = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot x^3 + B}, \quad \mathrm{B = 2C}$

Diese Funktion kann auch wieder in die DGL eingesetzt werden um die Lösung zu überprüfen:

$$\frac{2x^2}{2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot x^3 + B}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot x^3 + B} = \mathrm{x}^2$$

MC Basisprüfung Sommer 2020

5. (VII) Welche der folgenden Aussagen über Differentialgleichungen erster Ordnung sind korrekt?

   (a) Die Gleichung $y' = \sin(x)(x^2 y + \cosh(x) y + \sinh(x)) + e^x y$ ist linear.

   (b) Die Gleichung $y' = 2 + y - 2x^2 - x^2 y$ ist separierbar.

   (c) Die Gleichung $(e^x + 2x^2 y^3)(-y') = e^x y + x y^4$ ist exakt.

   (d) Die Gleichung $y' = 2y'x + \sin(y')$ ist eine Clairaut'sche Differentialgleichung.

MC Basisprüfung Sommer 2020

5. (VII) Welche der folgenden Aussagen über Differentialgleichungen erster Ordnung sind korrekt?

   (a) Die Gleichung $y' = \sin(x)(x^2 y + \cosh(x)y + \sinh(x)) + e^x y$ ist linear.

   (b) Die Gleichung $y' = 2 + y - 2x^2 - x^2 y$ ist separierbar.

   (c) Die Gleichung $(e^x + 2x^2y^3)(-y') = e^x y + xy^4$ ist exakt.

   (d) Die Gleichung $y' = 2y'x + \sin(y')$ ist eine Clairaut'sche Differentialgleichung.

a) Ist korrekt, da y(x) nur in der ersten Potenz vorkommt

b) Ist auch korrekt da: $y' = (2+y) - x^2(2+y) \Leftrightarrow \frac{y'}{2+y} = 1 - x^2$