ANALYSIS II

Übungsstunde VII

Ablauf

- Nachbesprechung Serie 5
- Flussrechnungen
  - Repetition Parametrisierungen (Analysis I)
- Der Divergenzsatz von Gauss

Nachbesprechung Serie 5

2. Es seien $a, c > 0$ Konstanten. Das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = c\left(1 - a^2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, -a^2\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, 0\right)$$

beschreibt die Strömung einer idealen Flüssigkeit um einen senkrechten Zylinder vom Radius a, dessen Achse mit der z-Achse zusammenfällt (siehe dazu die Abbildung und eine animierte Visualisierung unter folgendem Link: `https://tinyurl.com/ethanalysis-laminarflow`).

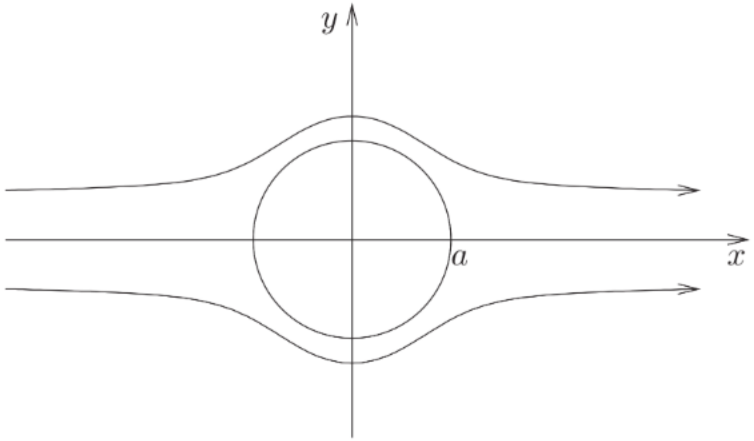
a) (♥) Zeigen Sie, dass $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ und

b) (♥) dass $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ gilt,

c) (♥) dass an der Oberfläche des Zylinders die Strömung tangential verläuft und

d) dass in grosser Entfernung vom Zylinder das Vektorfeld nahezu homogen ist.

e) Bestimmen Sie ausserdem die Punkte maximaler und minimaler Geschwindigkeit auf der Zylinderoberfläche.



Nachbesprechung Serie 5

- Zwei Möglichkeiten:
  - Zeigen, dass der Ortsvektor $\vec{r}$ senkrecht auf dem Vektorfeld steht

    $\Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{v} = 0$ (nur möglich, da der Tangentialvektor senkrecht auf dem Ortsvektor steht)
  - Zeigen, dass die Richtung des Tangentialvektors und die des Vektorfelds identisch sind

    $\Rightarrow \vec{v} = f \cdot \vec{t}, \quad f$ ist ein skalarer Faktor (Oft auch einfach zu zeigen, dass $\vec{v} \times \vec{t} = \vec{0}$ gilt)

- Es kann hilfreich sein, eine Koordinatentransformation auf das Vektorfeld anzuwenden.
  (hier z.B Polarkoordinaten)

Nachbesprechung Serie 5

2. Es seien $a, c > 0$ Konstanten. Das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = c\left(1 - a^2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, -a^2\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, 0\right)$$

Polarkoord. $\vec{r} = \begin{pmatrix} a\cdot\cos\varphi \\ a\cdot\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \vec{v} = c\begin{pmatrix} 1 - a^2\dfrac{a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{a^4} \\ -a^2\dfrac{2\cdot a^2\cos\varphi\sin\varphi}{a^4} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{c}\begin{pmatrix} 1-\cos^2\varphi+\sin^2\varphi \\ -2\cdot\cos\varphi\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{c}\begin{pmatrix} 2\sin^2\varphi \\ -2\cdot\cos\varphi\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -a\cdot\sin\varphi \\ a\cdot\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \mathrm{c}\begin{pmatrix} 2\sin^2\varphi \\ -2\cdot\cos\varphi\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 2ac\cdot\ sin^2\varphi\cdot\cos\varphi\ - 2ac\cdot\ sin^2\varphi\cdot\cos\varphi \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Flussrechnungen

Satz. *Seien ein Vektorfeld $\vec{v}$ und eine Fläche S mit Parametrisierung $\vec{r}(u,v)$ sowie eine ausgezeichnete Richtung gegeben. Wenn $\vec{n}$ der Normaleneinheitsvektor auf S in die ausgezeichnete Richtung ist, dann ist der* ***Fluss Φ von $\vec{v}$ durch S in Richtung $\vec{n}$*** *gegeben durch*

$$\Phi = \iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\ \mathrm{d}O = \pm \iint_B \vec{v}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r_u}(u,v) \times \vec{r_v}(u,v))\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v.$$

Dabei muss das Vorzeichen $\pm$ so gewählt werden, dass $\pm\ (\vec{r_u} \times \vec{r_v})$ in Richtung $\vec{n}$ zeigt.

$\vec{v} \cdot \vec{n}$ berechnet den parallelen Anteil zwischen $\vec{v}$ & $\vec{n}$

r(u,v) : Parametrisierung der Oberfläche

Wie bestimmt man die Richtung von ($\vec{r_u} \times \vec{r_v}$) ?

Single Choice BP 2019

18. (VI) Sei $\vec{v}$ ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$, dessen Feldlinien Geraden parallel zur xy-Ebene sind und sei E die Einheitskreisscheibe in der xy-Ebene. Welche Aussage über den Fluss von $\vec{v}$ durch E von unten nach oben ist korrekt?

(a) Der Fluss ist null.

(b) Der Fluss ist negativ.

(c) Der Fluss ist positiv.

(d) Die gegebenen Angaben genügen nicht, um eine Aussage über das Vorzeichen des Flusses zu schliessen.

Lösung Single Choice BP 2019

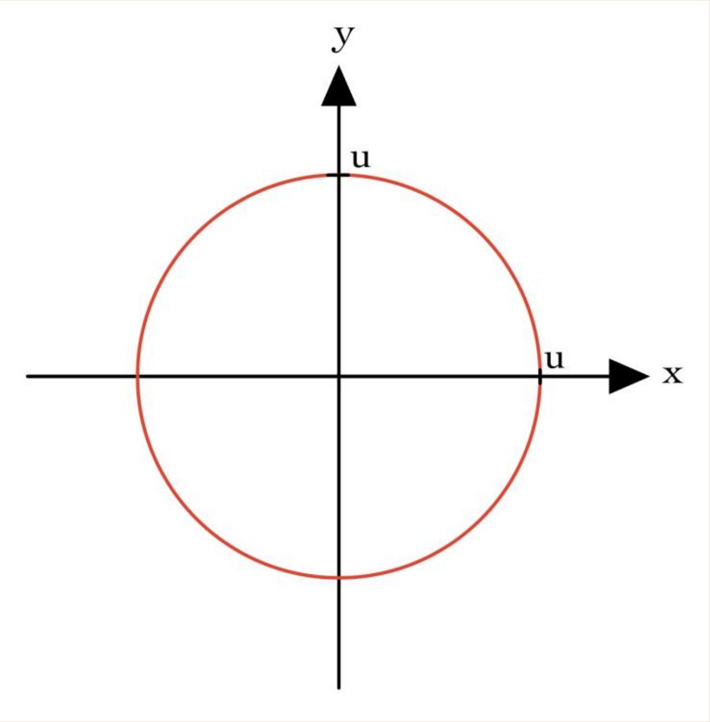
- Fluss von unten nach oben: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Das Vektorfeld ist immer Parallel zur xy- Ebene: $\vec{v} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \\ 0 \end{pmatrix}$

- Da diese Vektoren senkrecht aufeinander stehen ergibt das Skalarprodukt 0 und der Fluss durch die Einheitskreisscheibe ist 0

Repetition Analysis I

$$\vec{r} = u \cdot \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = u \cdot \begin{pmatrix} \sin(v) \\ \cos(v) \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = u \cdot \begin{pmatrix} \cos(v) \\ -\sin(v) \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = u \cdot \begin{pmatrix} -\sin(v) \\ -\cos(v) \end{pmatrix} \qquad v \in [0,2\pi]$$

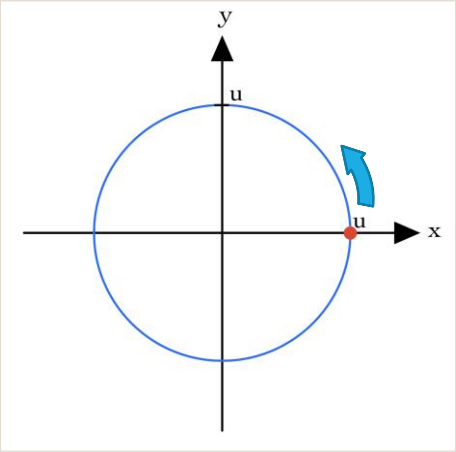


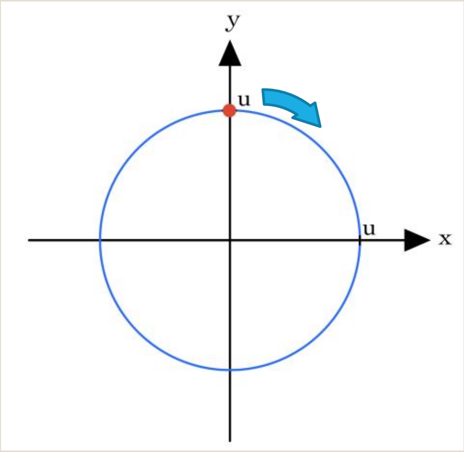
Repetition Analysis I

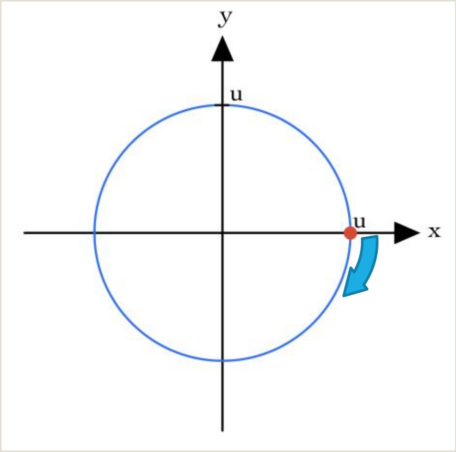
Startpunkt

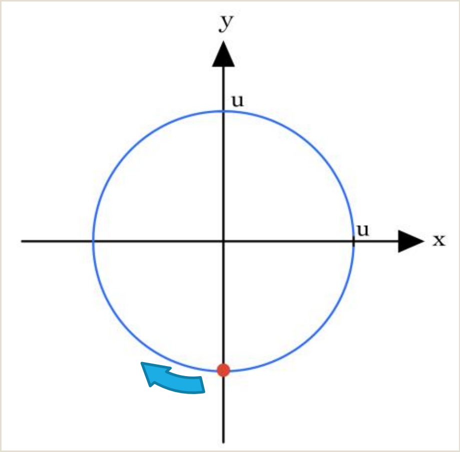
Durchlaufsinn

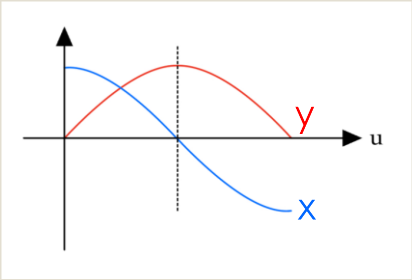
$$\vec{r} = u \cdot \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = u \cdot \begin{pmatrix} \sin(v) \\ \cos(v) \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = u \cdot \begin{pmatrix} \cos(v) \\ -\sin(v) \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = u \cdot \begin{pmatrix} -\sin(v) \\ -\cos(v) \end{pmatrix} \qquad v \in [0,2\pi]$$

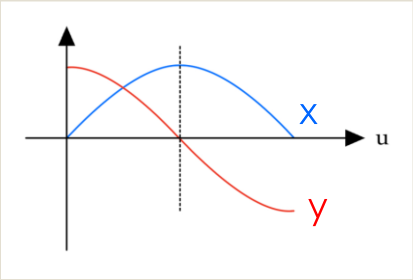


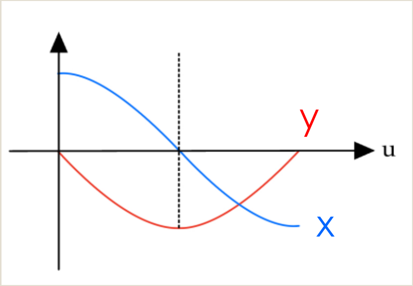


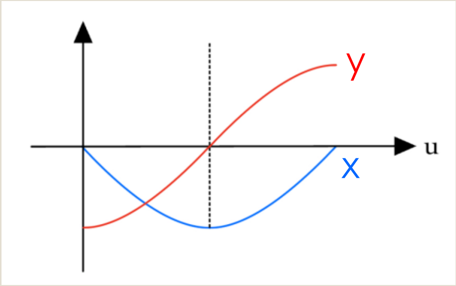








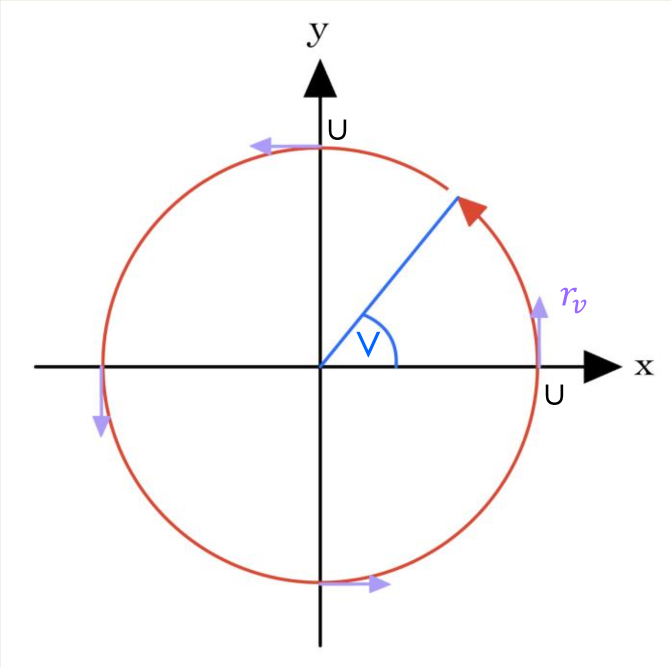




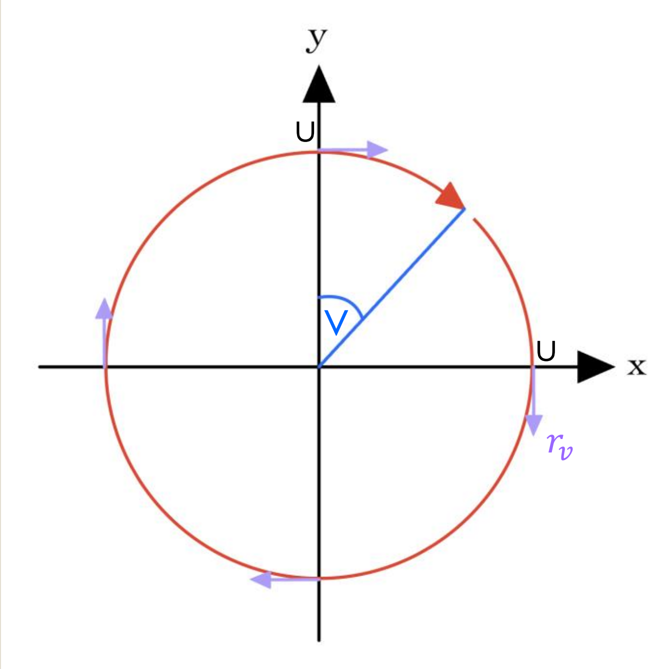
Rechte-Hand-Regel / Punkt einsetzen

- Parametrisierungen besitzt eine Durchlaufrichtung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} u \cdot \cos(v) \\ u \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$$



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} u \cdot \sin(v) \\ u \cdot cos(v) \end{pmatrix}$$



Rechte-Handregel

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} u \cdot \cos(v) \\ u \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$$

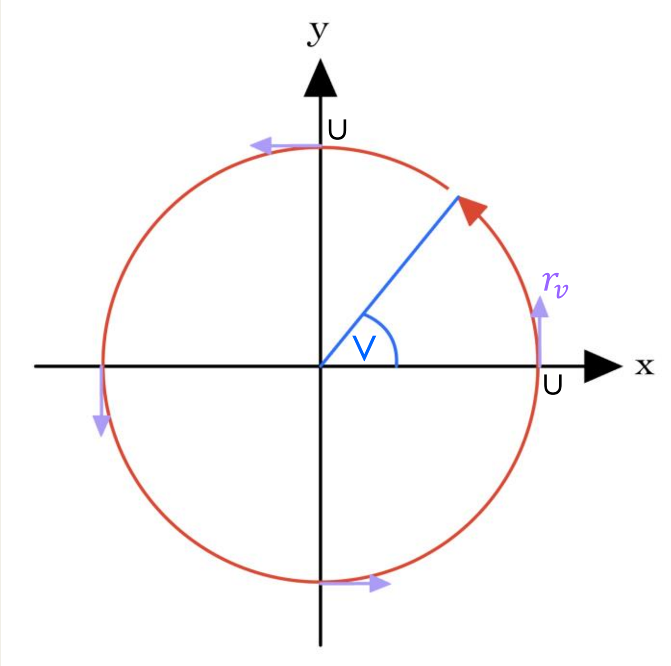


Abb. 1

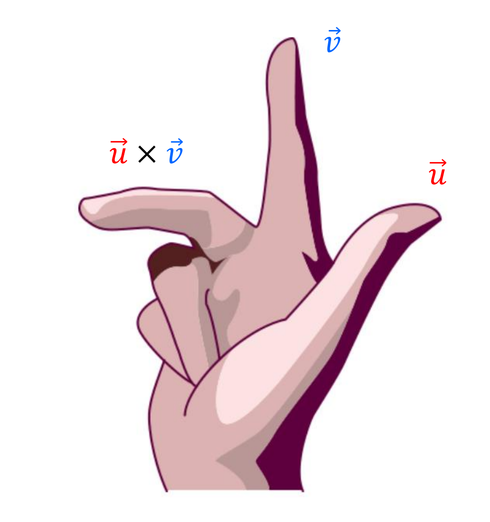


Abb. 2

Abb. 1: https://lp.uni-goettingen.de/get/text/4940 Abb. 2: https://www.einstein-online.info/spotlight/felder/

Single Choice BP Winter 2021

14. (VI) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon (x, y, z) \mapsto (e^x xy, y^2 - 3, -z)$$

und die Einheitskreisscheibe $D := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ in der x, y-Ebene. Welche Aussage über den Fluss von $\vec{v}$ durch D von unten nach oben ist korrekt?

(a) Der Fluss ist negativ.

(b) Der Fluss ist positiv.

(c) Der Fluss ist 0.

(d) Der Fluss ist nicht wohldefiniert, da keine Umlaufrichtung des Einheitskreises angegeben wurde.

Lösung SC 14 BP Winter 2021 (Ausführlicher Weg)

Wir wissen, dass mit dieser Parametrisierung
$\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}$ in Richtung $\vec{n}$ zeigt.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} u \cdot \cos(\varphi) \\ u \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi = \int\int_D \vec{v} \cdot \vec{n}\, dO = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \vec{v} \cdot (\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})\, dr\, d\varphi$$

$$\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \cdot \sin(\varphi) \\ r \cdot \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \cdot \cos^2(\varphi) + r \cdot \sin^2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \vec{v} \cdot (\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \begin{pmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \\ -0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} dr\, d\varphi = 0$$

Lösung SC 14 BP Winter 2021(schneller Weg)

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} u \cdot \cos(\varphi) \\ u \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi = \int\int_D \vec{v} \cdot \vec{n}\, dO\,, \qquad dO = |\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}| \cdot dr\, d\varphi = r \cdot dr\, d\varphi$

$$\Phi = \int\int_D \vec{v} \cdot \vec{n}\, dO = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \begin{pmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \\ -0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot r\, dr\, d\varphi = 0$$

SC Basisprüfung Sommer 2018

25. (Vorzeichen eines Flusses SC) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x^2 + yz, y)$$

und das Dreieck D mit Ecken $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$. Welche Aussage über den Fluss von $\vec{v}$ durch D von oben nach unten ist korrekt?

(a) Der Fluss ist negativ.

(b) Der Fluss ist 0.

(c) Der Fluss ist positiv.

(d) Der Fluss ist nicht definiert, da keine Parametrisierung $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ des Dreiecks D angegeben ist.

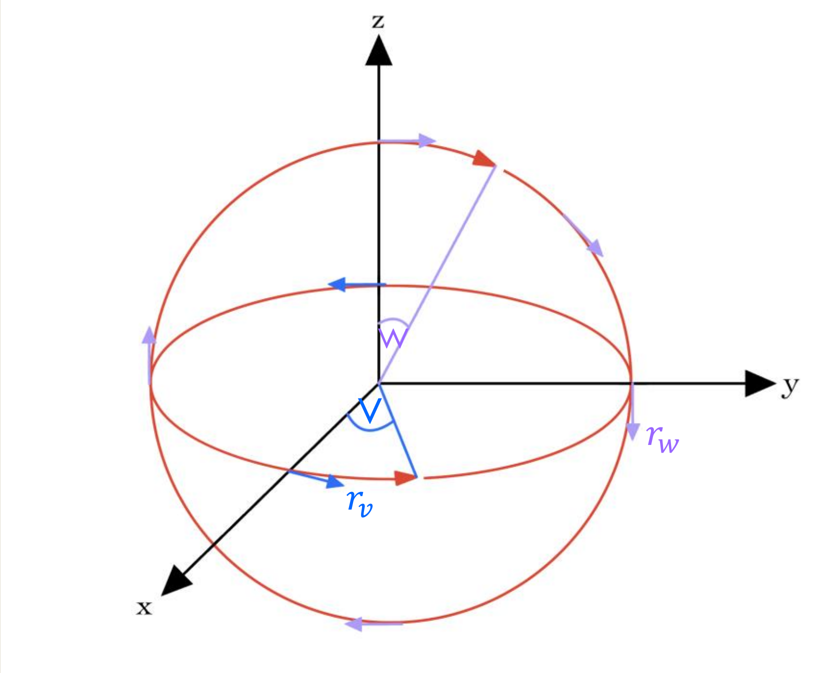
Lösung SC 25 Basisprüfung Sommer 2018

- Das Dreieck liegt in der xy-Ebene, somit ist der Normaleneinheitsvektor von oben nach unten gegeben durch $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Das es sich um ein 2D Objekt handelt gilt dO = dA = dxdy

$$\Phi = \int\int_D \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+yz \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx\, dy = -\int\int_D y\, dx\, dy < 0$$

Da sich das Dreieck im ersten Oktanten befindet kann das Integral der Funktion y über die Dreiecksfläche nur positive Werte liefern

Beispiel Kugel



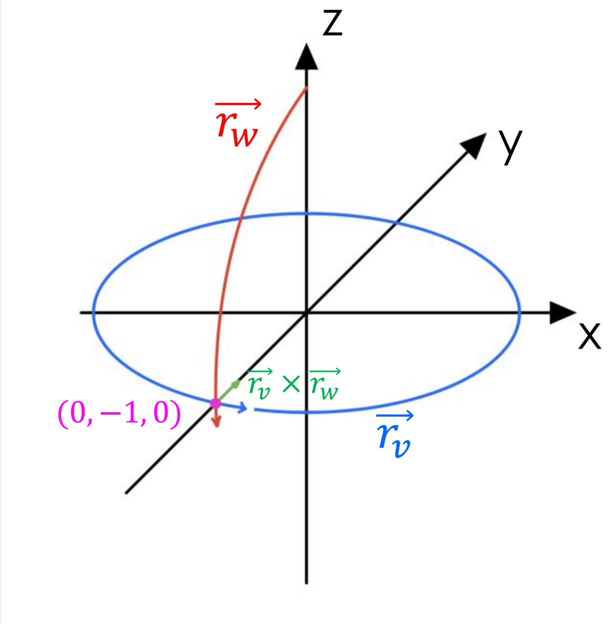
$$\vec{r}(v,w) = R \cdot \begin{pmatrix} \sin(\mathrm{w}) \cdot \cos(v) \\ \sin(\mathrm{w}) \cdot \sin(v) \\ \cos(w) \end{pmatrix}$$

Betrachtet man den Punkt $(0,-1,0)$, so kann dieser mit der Parametrisierung folgendermassen dargestellt werden: $\vec{r}\left(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$\left(\& \ \vec{r}\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right) \ \rightarrow \notin \ Konvention\ v \in [0,2\pi], w \in [0,\pi]\right)$

Im Punkt $\vec{r}\left(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ zeigt $\overrightarrow{r_v}$ in die positive x-Richtung und $\overrightarrow{r_w}$ in die negative z-Richtung.

Es folgt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



Divergenzsatz von Gauss

Satz (Divergenzsatz von Gauss). *Seien $\vec{v}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $B \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Volumen mit $B \subset D(\vec{v})$. Sei die Fläche $S = \partial B$ der **Rand von B**. Dann ist der Fluss Φ von $\vec{v}$ durch $S = \partial B$ nach aussen gegeben durch*

$$\Phi = \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}O = \iiint_B \operatorname{div} \vec{v} \, \mathrm{d}V.$$

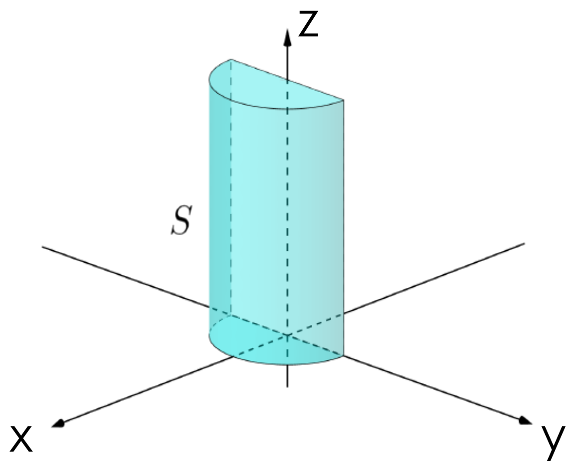
- Kein Normalenvektor, Volumenelement statt Oberflächenelement

  $\Longrightarrow$ Analog zu Kapitel 5: Koordinatentransformationen, Volumenintegrale

<u>Wichtig:</u> Die Richtung des Flusses ist im Divergenzsatz vorgegeben: Von Innen nach Aussen

<u>Korollar:</u> Gilt $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$, so verschwindet jeder Fluss durch eine **geschlossene** Oberfläche

3. Ein gerader Hohlzylinder (inklusive Boden und Deckel) mit Radius 1 und Höhe 3 stehe im Koordinatenuntersprung. Durch einen Schnitt der senkrechten Ebene $x = 0$ entsteht im Teilraum mit $x > 0$ eine Fläche S in Form eines halben Hohlzylinders.



Gegeben sei ausserdem ein Vektorfeld $\vec{v}$:

$$\vec{v}(x, y, z) = \left(x + 1, y, z^2 + 1\right).$$

Bestimmen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch S, wobei der Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ von innen nach aussen zeige.

Beispiel zur Anwendung des Divergensatzes

- Volumen wäre einfach zu parametrisieren, ist aber nicht geschlossen
- Bevor der Satz von Gauss angewandt werden kann, muss das Volumen mit einem Rechteck als Rückwand geschlossen werden.

Beispiel zur Anwendung des Divergensatzes

- Parametrisierung des Volumens: $\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$, $r \in [0{,}1] \quad \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad z \in [0{,}3]$
- $\mathrm{div}(\vec{v}) = 1 + 1 + 2\mathrm{z} = 2(\mathrm{z} + 1)$

$$\Phi_{HZ} = 2 \cdot \int_0^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (z + 1) \cdot r \, dr \, d\varphi \, dz = \frac{15\pi}{2}$$

Beispiel zur Anwendung des Divergensatzes

- Normaleneinheitsvektor des Rechtecks von Innen nach Aussen: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Fluss durch das Rechteck:

$$\Phi_{\mathrm{R}} = \int_0^3 \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 0+1 \\ y \\ z^2+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dy\, dz = -\int_0^3 \int_{-1}^1 1\, dy\, dz = -6$$

Totaler Fluss:

$$\Phi_{tot} = \Phi_{HZ} - \Phi_{\mathrm{R}} = \frac{15\pi}{2} + 6$$

Beispielaufgabe BP Sommer 2022

Frage 24 Sei S die im 1. Oktanten $(x, y, z \geq 0)$ liegende Teilfläche der Einheitshohlkugel und $\vec{v} = (xyz, y^2z, yz^2)$. Bestimmen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch S vom Ursprung weg.

- Wir schliessen das Volumen mit 3 Viertelkreisen in den Koordinatenebenen.

$$div\ \vec{v} = yz + 2yz + 2yz = 5yz$$

- Das Volumen des 8tels der Kugel kann folgendermassen parametrisiert werden:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ r \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{r} \in [0,1] \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\Phi = 5 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \sin(\varphi) \cdot r^2 \cdot \sin(\theta)\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 5 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^4 \cdot \sin^2(\theta) \cdot \cos(\theta) \sin(\varphi) \cdot dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Phi = 5 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^4 \cdot \sin^2(\theta) \cdot \cos(\theta)\sin(\varphi) \cdot dr\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta) \cdot \cos(\theta)\sin(\varphi)\ \ d\theta\, d\varphi$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta) \cdot \cos(\theta)\,[\cos(\varphi)]_0^{\frac{\pi}{2}}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta) \cdot \cos(\theta)\ \ d\theta = \frac{1}{3}\sin^3(\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$

- Seitenflächen: xy-Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ yz-Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ xz-Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Parametrisierungen: xy-Ebene: $\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ yz-Ebene: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$

- xz-Ebene: $\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ 0 \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$

$$\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} xyz \\ y^2 z \\ yz^2 \end{pmatrix}}$$

$\vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n} = 0$ für alle drei Viertelkreise

$$\Phi_{tot} = \frac{1}{3}$$