ANALYSIS II

Übungsstunde VIII

Ablauf

- Intuitionsübung
- Nachbesprechung Serie 6
- Arbeitsrechnungen
- Satz von Stokes

Intuitionsübung

Oft berechnet man den Fluss eines Vektorfelds $\vec{v}$ durch eine Fläche S, indem man diese erst mit einer zusätzlichen Fläche S' zum Rand eines Volumens V (also $\partial V = S \cup S'$) erweitert und dann den Divergenzsatz anwendet:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{v}\, \mathrm{d}V = \iint_{S \cup S'} \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}O = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}O + \iint_{S'} \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}O$$

$$\Longrightarrow \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}O = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v}\, \mathrm{d}V - \iint_{S'} \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}O$$

Wir wollen zusammen erarbeiten, mit welchen Tricks man diese Methode effizient und angenehm gestalten kann.

Also: **Worauf kann man alles achten, um die gesamte Berechnung zu vereinfachen? Schreiben Sie in den nächsten 2 Minuten eine stichwortartige Liste von Dingen, die Ihnen in den Sinn kommen!** Diese Liste muss natürlich nicht abschliessend sein, die Zeit ist knapp gewählt.

Intuitionsübung

Nehmen Sie sich **3 Minuten Zeit** für folgene Aufgabe:

- Vergleichen Sie Ihre Listen mit einer Person neben Ihnen und ergänzen Sie sie gegenseitig, wo es sinnvoll ist.
- Wählen Sie gemeinsam einen Eintrag und beschreiben Sie genauer, wie dies die Rechnung vereinfachen kann und worauf man dabei achten kann.
- Bereiten Sie sich gemeinsam darauf vor, dies kurz der Gruppe zu erklären.

Beispielhafte Liste

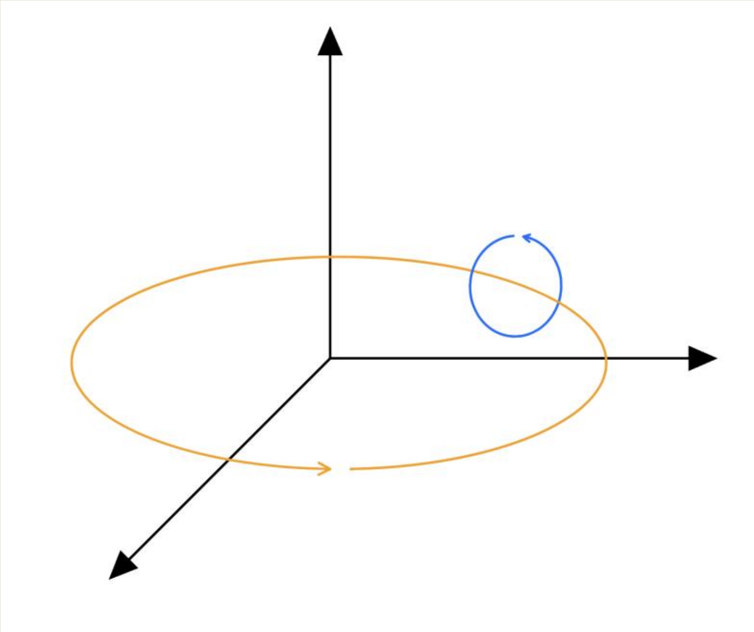
- Prüfen, ob $div\,\vec{v} = 0$ gilt ⇒ Dann ist der Fluss durch jede geschlossene Oberfläche = 0 (Nur noch den Fluss durch S' berechnen
- S' so wählen, dass das dadurch entstandene Volumen einfach zu parametrisieren ist
- S' so wählen, dass sich das Vektorfeld vereinfacht – z. B. S' liegt in einer Koordinatenebene, sodass eine Variable konstant Null ist.
- S' mit dem Ziel wählen, dass sich das Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{n}$ vereinfacht
- S' so wählen, dass sich S' auch einfach parametrisieren lässt
- $div\,\vec{v}$ berechnen und das Volumen so wählen, dass das Integral $\int_V \; div\,\vec{v}\; dV$ einfach zu lösen ist (z. B. Symmetrien ausnützen)
- Da der Satz von Gauss nicht angewendet werden kann, wenn $div\,\vec{v}$ nicht im gesamten Volumen definiert ist, sollte das Volumen so gewählt werden, dass Punkte, welche diese Bedingung nicht erfüllen nicht Teil des Volumens sind

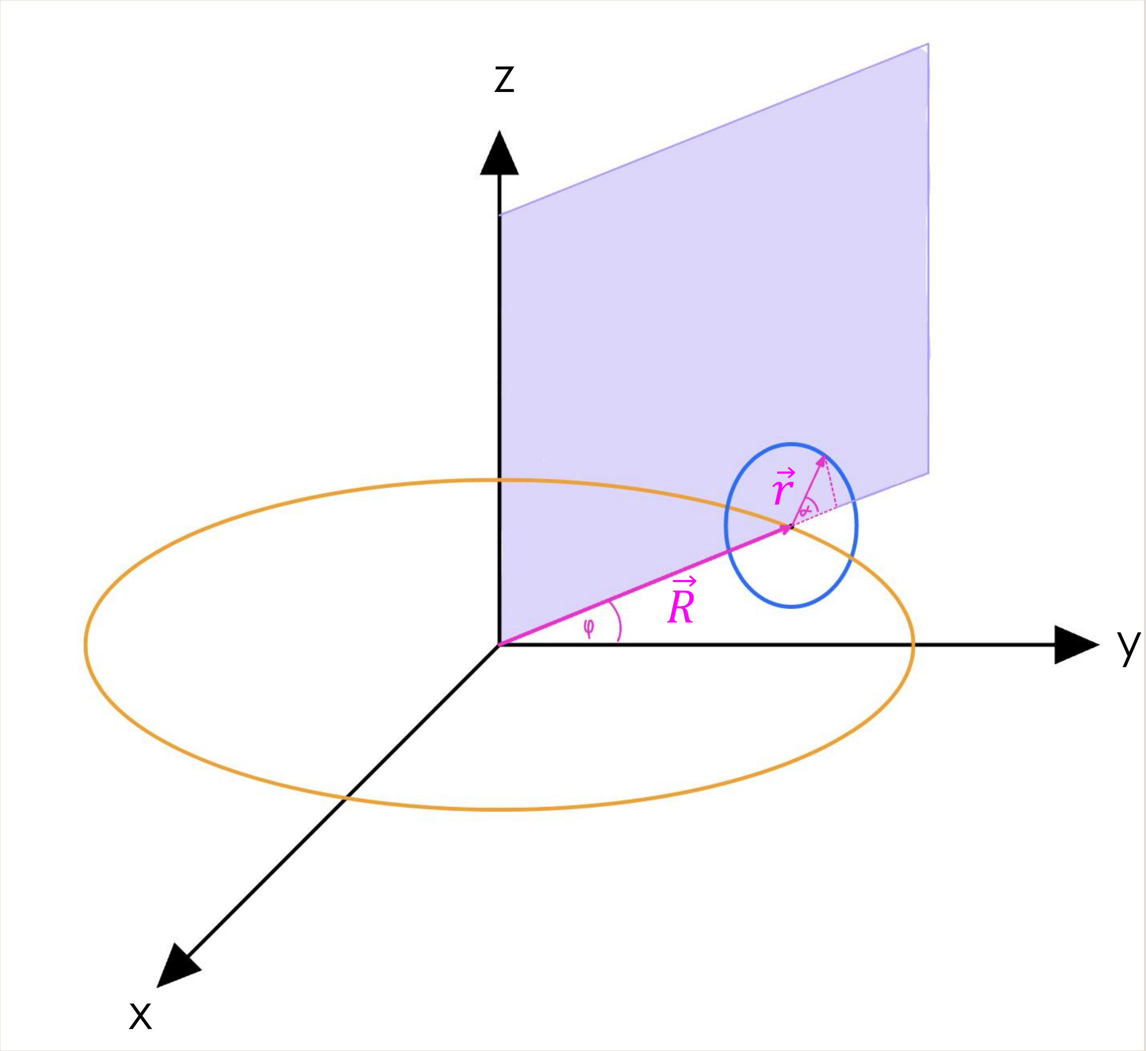
Nachbesprechung Serie 6 – Aufgabe 2

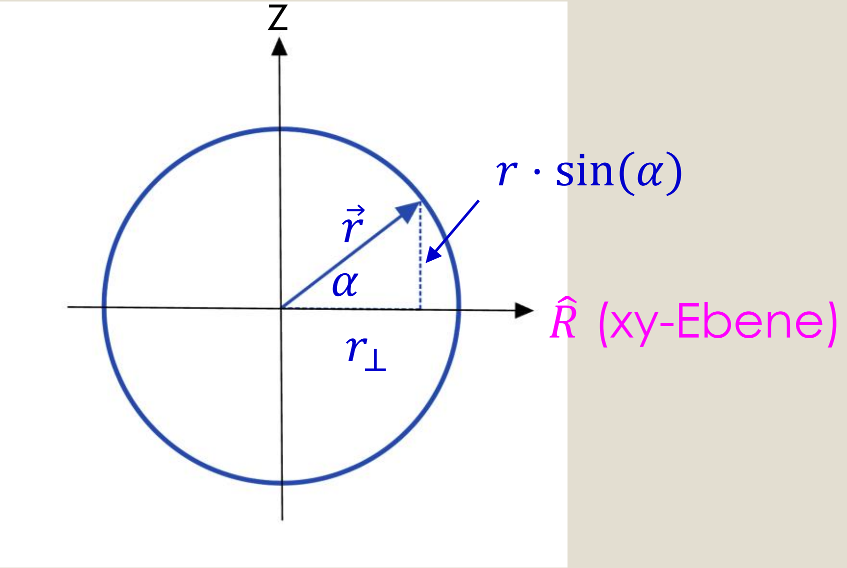
Wie findet man die Parametrisierung eines komplizierteren Körpers ? – Bsp. Torus

Der Torus lässt sich als eine gekoppelte Parametrisierung zweier Kreise darstellen

Um die Terme der Parametrisierung für (x, y, z) zu finden, zeichnet man einen allgemeinen Vektor zu einem Punkt auf dem Körper/der Oberfläche und zerlegt diesen nach seinen einzelnen Komponenten







Wir beginnen mit der z-Komponente der Parametrisierung.

Nur der kleine blaue Kreis trägt zur z-Komponente bei, da sich der grosse Kreis nur in der xy-Ebene befindet.

Die z-Komponente des kleine Kreise lautet

$$z = r \cdot \sin(\alpha)$$

Die Komponente des Vektors $\vec{r}$ in der xy-Ebene lautet:

$$r_\perp = r \cdot cos(\alpha)$$

$r_\perp$ gibt nur die Länge der Komponente in der xy-Ebene an. Nicht die Richtung!

Zusammensetzung der Parametrisierung

Da in $r_\perp$ die selbe Richtung wir $\vec{R}$ zeigt und $\vec{R}$ die normale Kreisparametrisierung besitzt:

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\varphi) \\ R \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Können wir die Richtung von $r_\perp$ auch über den $\cos(\varphi)$ & $\sin(\varphi)$ festlegen.

(Würden wir dies nicht tun, wäre der kleine Kreis immer parallel zur x-Achse)

Die Gesamte Parametrisierung lautet dann:

$$\vec{P}(\alpha,\varphi) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\varphi) \\ R \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r \cdot \cos\alpha) \cdot \cos(\varphi) \\ (R + r \cdot \cos\alpha) \cdot \sin(\varphi) \\ r \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 – Implizite Gleichung finden

- Ziel: Die Variablen der Parametrisierung eliminieren → Hierfür gibt es kein Rezept

- Tipps:
  - Zu verstehen, was die Parametrisierung macht bzw. wie der Körper aussieht kann helfen.
  - Fast alle oftmals vorkommende 3D-Körper besitzen implizite Gleichungen mit quadrierten Variablen (Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, Kegel: $x^2 + y^2 = z^2 R^2$, Ellipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = R^2$)
  - Winkelfunktionen verschwinden oft über Identitäten ($\cosh^2(\mathrm{x}) - \sinh^2(x) = 1$ / $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Erfordert etwas Übung!

Arbeit entlang eines parametrisierten Wegs

Satz. *Die* **Arbeit** A *eines Vektorfelds* $\vec{v}$ *entlang eines Wegs* W *von* P *nach* Q *mit Parametrisierung* $\vec{r}(t)$, $t \in [t_P, t_Q]$, *beträgt*

$$A = \int_W \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_P}^{t_Q} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\ \mathrm{d}t = \int_{t_P}^{t_Q} \begin{pmatrix} v_1(x(t), y(t), z(t)) \\ v_2(x(t), y(t), z(t)) \\ v_3(x(t), y(t), z(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}\ \mathrm{d}t.$$

Bemerkungen:

- Der Weg ist eine Kurve im Raum und wird daher nur von einem Parameter beschrieben.
- Nur der Anteil des Vektorfelds, der kollinear zur Richtung des Weg ist, zählt für die Arbeit.
- Vertauscht man die Durchlaufsrichtung, ändert sich das Vorzeichen der Arbeit.
- Ist der Wert der Arbeit positiv, so wird das Teilchen vom Vektorfeld geschoben
- Wege können beliebig aneinander gereiht werden, solange die Start- und Endpunkte übereinstimmen

Beispielaufgabe

Welche Arbeit muss man im Vektorfeld $\vec{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} \frac{3x^2}{y} \\ -\frac{16}{27} \cdot \frac{y^2}{x} \\ z^2 \end{pmatrix}$ aufwenden, wenn man sich im Uhrzeigersinn entlang der Ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ in der xy-Ebene bewegt?

Lösung Beispielaufgabe

- Um die Ellipse im Uhrzeigersinn zu durchlaufen verwenden wir die Parametrisierung

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin(\varphi) \\ 3 \cdot \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{r}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(\varphi) \\ -3 \cdot sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Setzen wir die Parametrisierung in das Vektorfeld ein, so erhalten wir:

$$\vec{v}(\vec{r}(\varphi)) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \frac{sin^2(\varphi)}{\cos(\varphi)} \\ -\frac{8}{3} \cdot \frac{cos^2(\varphi)}{\sin(\varphi)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Das Arbeitsintegral berechnet sich dann zu:

$$A = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 4 \cdot \frac{sin^2(\varphi)}{\cos(\varphi)} \\ -\frac{8}{3} \cdot \frac{cos^2(\varphi)}{\sin(\varphi)} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(\varphi) \\ -3 \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} 8 \cdot \cos^2(\varphi) + 8 \cdot \sin^2(\varphi)\, d\varphi = 16\pi$$

Satz von Stokes

Satz (Satz von Stokes). *Seien $\vec{v}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $S \subset D(\vec{v}) \subset \mathbb{R}^3$ eine beschränkte Fläche. Sei der Weg ∂S der **Rand von S**. Dann ist die Arbeit A von $\vec{v}$ entlang ∂S gegeben durch*

$$A = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \; \mathrm{d}O.$$

Dabei ist $\vec{n}$ so orientiert, dass ∂S bezüglich $\vec{n}$ im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird.

Analog zum Fluss → Statt über die Oberfläche integriert man über das Volumen

Hier: Statt über die Kurve integriert man über die Fläche, welche von der Kurve eingeschlossen wird

Funktioniert nur, wenn es sich um einen geschlossenen Weg handelt

Schliessen eines Wegs

Genauso, wie man bei der Flussrechnung ein Oberfläche mit einer zusätzlichen Fläche schliessen kann, ist es möglich einen Weg mit einer zusätzlichen Kurve zu schliessen.

Das Arbeitsintegral entlang dieses Wegs muss am Schluss von dem Resultat aus dem Satz von Stokes abgezogen werden.

Basisprüfung Winter 2021

4. Der Weg γ auf der im Koordinatenursprung zentrierten Einheitskugel führe entlang des Meridians (Halbkreises) mit Längengrad $\varphi = \pi/6$ vom Nord- zum Südpol. Bestimmen Sie die Arbeit des Vektorfelds $\vec{v} = (x^2y, y^2z, z^2x)$ entlang γ.

Lösung über den Satz von Stokes

- Wir schliessen den Weg über ein Geradenstück vom Südpol zum Nordpol durch den Ursprung

- Für den Halbkreis verwenden wir folgende Parametrisierung: $\vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} R \cdot \sin(\theta) \\ \frac{1}{2} R \cdot \sin(\theta) \\ R \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}$

- Die Rotation des Vektorfelds lautet: $rot(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -y^2 \\ -z^2 \\ -x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} R^2 \cdot \sin^2(\theta) \\ -R^2 \cdot \cos^2(\theta) \\ -\frac{3}{4} R^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$

Lösung über den Satz von Gauss

- Für das Oberflächenintegral benötigen wir noch den Vektor $\vec{r}_R \times \vec{r}_\theta$

$$\vec{r}_R \times \vec{r}_\theta = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta) \\ \frac{1}{2}\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}R \cdot \cos(\theta) \\ \frac{1}{2}R \cdot \cos(\theta) \\ -R \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Integral lautet dann:

$$\int_0^1 \int_0^\pi \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}R^2 \cdot \sin^2(\theta) \\ -R^2 \cdot \cos^2(\theta) \\ -\frac{3}{4}R^2 \cdot \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \cdot R \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\theta \; dR = \int_0^1 \int_0^\pi R^3 \cdot (\frac{1}{8}\sin^2(\,\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2(\theta)\, \mathrm{d}\theta \; dr = \frac{(1 - 4\sqrt{3})\pi}{64}$$

Lösung über den Satz von Gauss

- Für den senkrechte Weg durch den Ursprung gilt x = y = 0 und somit erfüllt das Vektorfeld $\vec{v} = \vec{0}$ und damit ist auch die Arbeit = 0

Lösung über die Parametrisierung

- Parametrisierung: $\vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(\theta) \\ \frac{1}{2} \cdot \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta) \\ \frac{1}{2} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}$
- Integral:

$$\int_0^{\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \sin^3(\theta) \\ \frac{1}{4} \sin^2(\theta)\, cos(\theta) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} cos^2(\theta) \sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta) \\ \frac{1}{2} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \frac{3\sqrt{3}}{16} \sin^3(\theta) \cos(\theta) + \frac{1}{8} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)\ d\theta$$

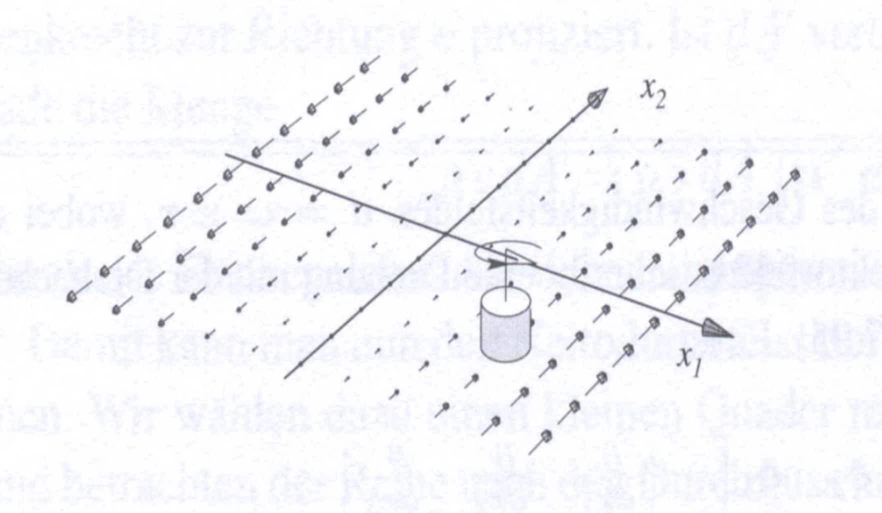
$$= \frac{\left(1 - 4\sqrt{3}\right)\pi}{64}$$

Wirbelfreie Vektorfelder

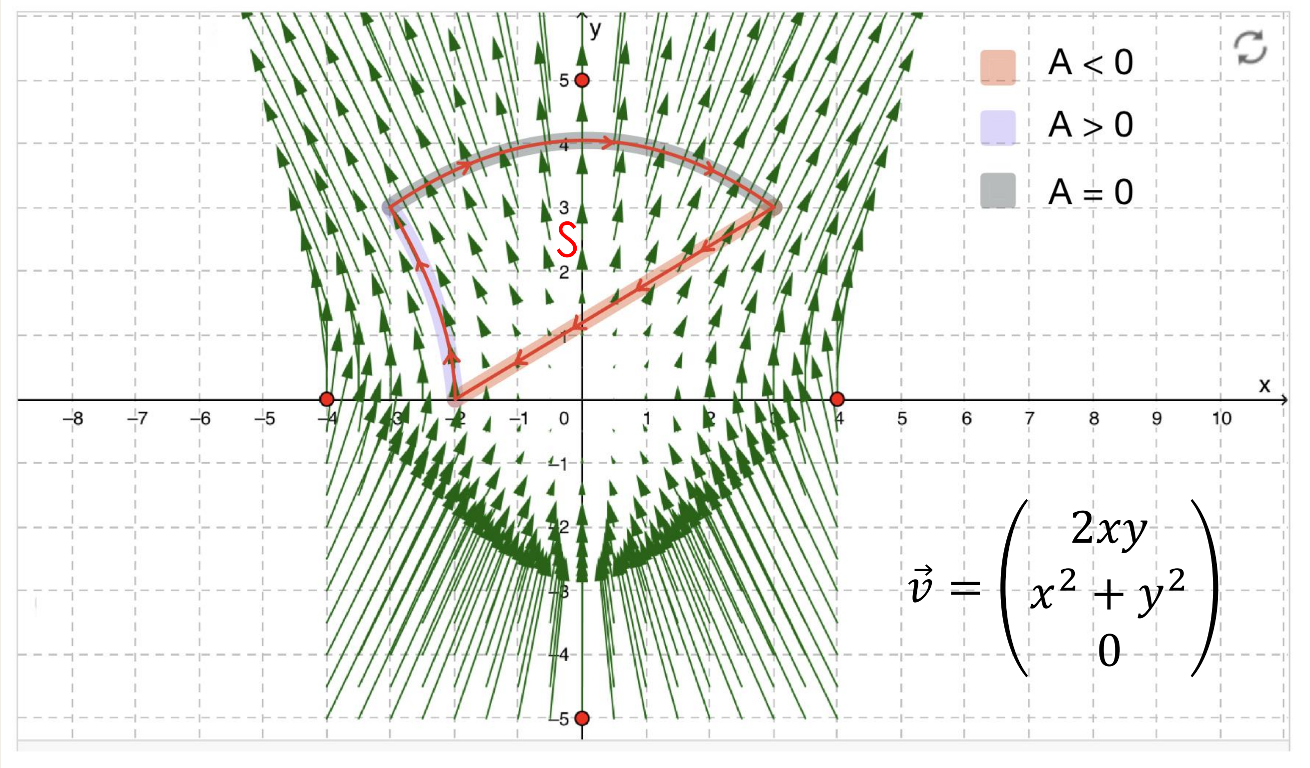
Satz. *Wenn $\vec{v}$ wirbelfrei ist (d.h. $\operatorname{rot}\vec{v} \equiv \vec{0}$) und W der Rand einer Fläche S mit $S \subset D(\vec{v})$ ist, dann erfüllt die Arbeit A von $\vec{v}$ entlang W*

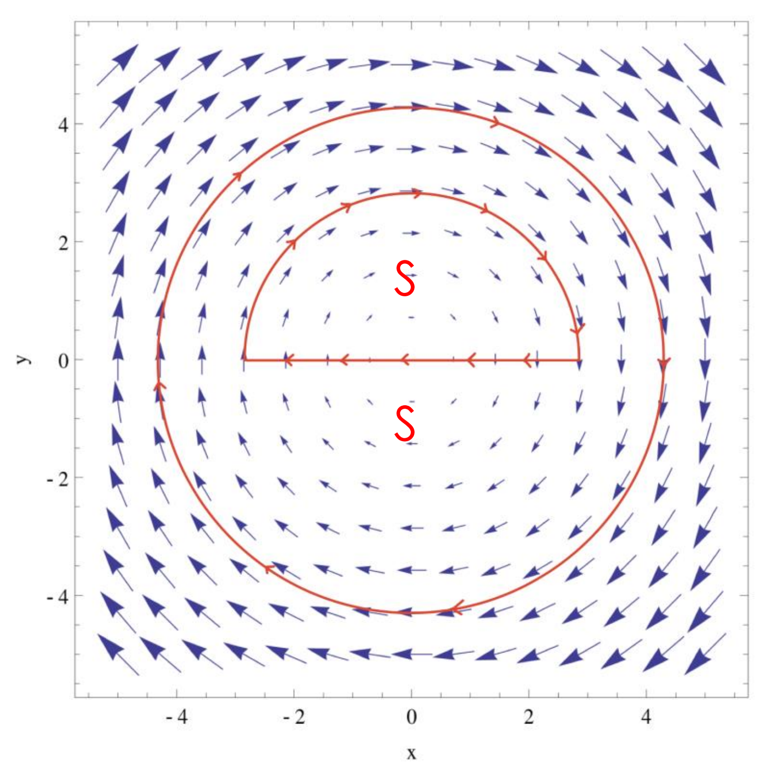
$$A = 0.$$

<u>Analog zum Fluss:</u> Gilt $div(\vec{v}) = 0$ gilt, so ist der Fluss durch jede geschlossene Oberfläche gleich Null



Wenn man einen Korken in ein Vektorfeld setzt, welches nicht wirbelfrei ist, so « schwimmt » der Korken nicht nur mit dem Vektorfeld, sondern dreht sich auch noch um die eigene Achse.





$rot\ \vec{v} = 0$ $\qquad \sum_{\partial S} A = 0$

$rot\ \vec{v} \neq 0$ $\qquad \sum_{\partial S} A \neq 0$

Im Falle von wirbelfreien Feldern bewegt man sich bei einem geschlossenen Weg immer zu gleichen Anteilen parallel und antiparallel zu den Feldvektoren (Dabei kommt es nicht nur auf die Länge der Strecke an sondern auch auf kollinearen Anteil des Wegs und der Feldvektoren)