Flot de Ricci sur les surfaces

1. CADRE ET OBJECTIF.

1.1. Prérequis.

Ce qui suit a pour cadre naturel la géométrie riemannienne. Les notions utilisées sont celles de : variété différentielle, espace tangent, fibré tangent, champs de vecteurs, champs de tenseurs, métrique riemannienne, dérivation covariante, laplacien des fonctions numériques, courbure. Seules les définitions de ces notions sont nécessaires. On désignera par ∇ la dérivation covariante et par Δ le laplacien. L'existence d'une théorie de l'intégration des fonctions numériques sur une variété compacte a été admise ainsi que les résulats fondamentaux associés ($\int$ div $X d\mu = 0$ pour X un champ de vecteurs, d'où l'on déduit la formule de Green $\int f\Delta g d\mu = \int g\Delta f d\mu$). Dans toute la suite (M,g) désignera une variété riemannienne de classe C^{∞}connexe orientable compacte de dimension 2, ce qu'on appellera une surface compacte.

1.2. Objectif.

La classification des surfaces (du point de vue des types de géométrie) a été achevée à la fin du XIX$^{\text{ieme}}$siècle et un des résultats les plus importants de cette théorie est le théorème d'uniformisation :

Théorème 1. *Soit (M,g_0) une surface compacte. Alors il existe une métrique g sur M, conforme à g_0 (i.e telle qu'il existe $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ telle que $g = fg_0$), telle que (M,g) soit de courbure scalaire constante.*

Nous allons présenter les éléments d'une démonstration, due à Richard Hamilton, de ce résultat dans le cas où la moyenne de la courbure scalaire de M est strictement négative. Cette preuve n'est pas la démonstration originale du théorème d'uniformisation (fondée sur l'analyse complexe), ce n'est sans doute pas la plus simple mais elle servira de prétexte à la présentation du flot de Ricci, qui est un procédé de déformation continue de la métrique. En particulier, on aura un procédé explicite permettant de passer continûment de g_0 à g. Dans ce qui suit, on donnera des « éléments de démonstration » car on admettra deux points essentiels : l'existence en temps petit du flot de Ricci et le théorème de Hodge. En revanche, on traitera en détail :

le principe du maximum, permettant de contrôler les solutions de certaines équations aux dérivées partielles, et l'existence en temps long du flot de Ricci.

2. DEFINITION DU FLOT DE RICCI ET PRINCIPE DU MAXIMUM.

2.1. Définition.

L'équation, dite du flot de Ricci, est l'équation d'évolution de la métrique:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = (r - R)g \qquad (1)$$

où : R est la courbure scalaire
$r = \frac{\int R d\mu}{\int d\mu}$, moyenne de la courbure scalaire de M.

A priori, r dépend de t. Une solution de cette équation, ou un flot de Ricci, est une famille à un paramètre de métriques g(t) sur M, paramétrée par t $\in I$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle non réduit à un point, g(t) satisfaisant l'équation (1). Il est pratique d'appeler « temps » ce paramètre t.

Exemple : Si (M,g_0) est de courbure constante, i.e $R = r$, alors $g(t) = g_0$ est un flot de Ricci sur M.

On admet le résultat suivant, d'existence en temps petit et d'unicité, qui relève de la théorie des équations aux dérivées partielles

Théorème 2. *Soit (M,g_0) donnée. Alors il existe $T > 0$ et un flot de Ricci (M,g(t)), $0 \leqslant t < T$ avec $g(0) = g_0$.*

De plus, si on a des flots de Ricci pour la même condition initiale (M,g_0) en t=0, définis respectivement sur I et J, alors ces flots coïncident sur $I \cap J$.

Le théorème suivant justifie l'intérêt géométrique du flot de Ricci :

Théorème 3. *Soit g(t) un flot de Ricci tel que g(0) $=$ g_0. Alors g(t) est conforme à g_0.*

Démonstration. *Soit $m \in M$ et V un vecteur non-nul tangent à M en m. Pour tout t, $g_{ij}(t)(V, V) \neq 0$ d'où $\frac{\left(\frac{\partial g_{ij}(t)(V,V)}{\partial t}\right)}{g_{ij}(t)(V,V)} = r - R$, d'où $g_{ij}(t)(V,V) = e^{\int (r-R)\mathrm{dt}} g_{ij}(0)(V,V)$, relation trivialement vérifiée si V=0, d'où, par polarisation, $g_{ij}(t)(V,W) = e^{\int (r-R)\mathrm{dt}} g_{ij}(0)(V,W)$ pour tout V et W tangents à m en M. Ainsi, $f = e^{\int (r-R)\mathrm{dt}}$ convient.* $\square$

En particulier, pour démontrer le théorème d'uniformisation, il est suffisant d'avoir une métrique de courbure constante qui se déduise de g_0 par un flot de Ricci.

A partir de l'équation de la métrique, on peut calculer les équations d'évolution des principales grandeurs géométriques. On trouve par exemple que r est constante au cours du temps et que :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + R(R - r)$$

Sur une surface, le tenseur de courbure est entièrement déterminé par la courbure scalaire. On va donc étudier l'équation d'évolution de R plutôt que celle de g. Il s'agit d'une équation de réaction diffusion et tout l'enjeu est de comprendre lequel des deux phénomènes va l'emporter.

2.2 Principe du maximum.

L'idée est de contrôler les solutions d'une équation (ou inéquation)de la forme $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) + < X(x,t), \nabla u(x,t) > + F(u(x,t))$ par les solutions de l'équation différentielle ordinaire associée $\frac{\partial u}{\partial t}(t) = F(u(t))$ qui sont a priori plus faciles à étudier. On appellera principe du maximum le :

Théorème 4. *Soit* $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *localement lipschitzienne. Soit* $u\colon M \times [0,T) \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *telle que* $\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant \Delta u + < X, \nabla u > + F(u)$*,où* X *est un champ de vecteurs sur M. Soit* φ *une solution de* $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(\varphi)$, $\varphi(0) = C$*, définie sur [0,T).*

Si $u(.,0) \geqslant C$ *sur M, alors* $u(.,t) \geqslant \varphi(t)$ *sur M* $\times$ *[0,T).*

Ce résultat repose de façon essentielle sur le fait que si en (x_0,t_0) est atteint un minimum global de u sur M $\times$ $[0,T)$, alors $\frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0) \leqslant 0$, $\nabla u(x_0,t_0)=0$ et $\Delta u(x_0,t_0) \geqslant 0$.

2.3 Premier contrôle de la courbure.

On désire appliquer le principe du maximum à l'équation d'évolution de R. On est donc amené à étudier l'équation différentielle associée : $\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} = s(s-r)$. On obtient :

Théorème 5. *La solution au problème de Cauchy* $\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} = s(s-r)$, $s(0) = s_0$ *est donnée par :*

$$s(t) = \frac{r}{1 - (1 - \frac{r}{s_0})e^{\mathrm{rt}}} \qquad si\ r \neq 0, s_0 \neq 0$$

$$s(t) = \frac{s_0}{1 - s_0 t} \qquad si\ r = 0$$

Si $s_0 > \max(r,0)$, il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $s(t) \to +\infty$ pour $t \to +\infty$: s n'est pas définie sur tout $\mathbb{R}$. En particulier, on ne peut pas espérer de bonnes majorations de R par application du principe du maximum. Cependant, on obtient de bonnes minorations, en effet :

Théorème 6. *Si r<0, on a :*

$$\frac{r}{1-(1-\frac{r}{R_{\max}(0)})e^{rt}} \geqslant R \geqslant \frac{r}{1-(1-\frac{r}{R_{\min}(0)})e^{rt}} \geqslant r + (R_{\min}(0) - r)e^{rt}$$

Si r=0, on a :

$$R \geqslant \frac{R_{\min}(0)}{1 - R_{\min}(0)t}$$

Si r>0, on a :

$$R \geqslant \frac{r}{1-(1-\frac{r}{R_{\min}(0)})e^{rt}}$$

où $R_{\max}(0)$ et $R_{\min}(0)$sont respectivement les bornes supérieure et inférieure de R sur M à t=0 (ce sont en fait des maximum et minimum puisque M est compacte).

2.4. Potentiel de courbure.

Le dernier théorème n'est pas suffisant pour conclure que $R \to r$ quand $t \to +\infty$ (excepté dans le cas où R est partout < 0 en t=0). L'idée est d'introduire de nouvelles fonctions pour lesquelles l'application du principe du maximum donnera des estimations plus précises.

On appelle potentiel de courbure une solution de $\Delta f = R - r$. On admet l'existence d'une solution (c'est une conséquence d'un théorème de Hodge qui affirme que sur une variété compacte M, si on considère le laplacien comme une application linéaire sur l'espace des fonctions de classe C^∞ de M dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $<g,h> = \int gh d\mu$, on a une décomposition orthogonale $C^\infty(M,\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}\Delta \oplus \operatorname{Im}\Delta$). En revanche, il n'est pas très difficile de montrer que f est définie à une constante additive près (sur une variété compacte, les seules fonctions harmoniques sont les constantes). Un simple calcul permet d'obtenir l'équation d'évolution de f :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f + rf + \text{constante}$$

Pour la suite, on choisit f de telle façon que la constante apparaissant dans cette équation soit nulle.

Théorème 7. *Soit $H = R - r + |\nabla f|^2$, alors :*

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \Delta H - 2|M|^2 + rH$$

où M est le tenseur : $M_{ij} = \nabla_i \nabla_j f - \frac{1}{2}\Delta f g_{ij}$

La démonstration de ce résultat est de nouveau purement calculatoire. Cependant une idée est cachée derrière ce calcul et l'introduction de la fonction H : l'équation d'évolution de H est plus agréable que celle de $R-r$ en vue d'une application du principe du maximum, et pourtant, pour fabriquer H, on a ajouté un terme positif à $R-r$: H devrait donc être plus difficile à majorer que $R-r$. En fait, lors du calcul de l'équation d'évolution de H, c'est la constitution du terme ΔH qui fait apparaître des termes négatifs permettant de compenser les « mauvais termes ».

Une simple application du principe du maximum donne alors: si à t=0, $H \leqslant C$, alors $H \leqslant \mathrm{Ce}^{\mathrm{rt}}$ pour tout $t \geqslant 0$. Ainsi :

Théorème 8. *Pour toute métrique initiale g_0 sur M, il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que, tant que le flot de Ricci est défini :*

$$-C \leqslant R \leqslant r + \mathrm{Ce}^{\mathrm{rt}}$$

Si r<0, il existe une constante $D \geqslant 0$ telle que, tant que le flot de Ricci est défini: $r - \mathrm{De}^{\mathrm{rt}} \leqslant R \leqslant r + De^{\mathrm{rt}}$

Si on savait que le flot de Ricci était défini pour tout $t \geqslant 0$, on aurait dans le cas $r < 0$, $R \rightarrow r$ pour $t \rightarrow +\infty$, ce qui permettrait de conclure.

3. EXISTENCE EN TEMPS LONG ET CONVERGENCE DE LA METRIQUE.

3.1 Inégalités BBS.

Une récurrence élémentaire mais pénible donne les équations d'évolution des dérivées de R : pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$, on a :

$$\frac{\partial |\nabla^n R|^2}{\partial t} = \Delta(|\nabla^n R|^2) - 2|\nabla^{n+1} R|^2 - (n+2) r |\nabla^n R|^2 + (\nabla^n R) \otimes_g \left[\sum_{j=0\ldots E(n/2)} (\nabla^j R) \otimes_g (\nabla^{n-j} R) \right]$$

où $X \otimes_g Y$ représente une combinaison linéaire de contractions respectant g de X et Y.

On utilise cette formule explicite pour démontrer le Théorème 9 qui est fondamental : sous le flot de Ricci, un simple contrôle de la courbure fournit un contrôle sur toutes ses dérivées. La démonstration se fait par récurrence, elle est assez longue et technique. L'idée de base pour obtenir de telles inégalités est la même que celle déjà utilisée pour majorer $R-r$: on ajoute aux quantités qu'on désire majorer des termes supplémentaires judicieusement choisis, qui, lorsqu'on les fera entrer dans le laplacien, feront sortir des termes négatifs qui compenseront les termes problématiques; pour conclure il suffit d'appliquer le principe du maximum à l'inégalité ainsi obtenue.

Théorème 9. *Pour tout* $a > 0$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *il existe une constante* C_n *dépendant uniquement de a, n et r telle que, si* $|R| \leqslant C$ *sur* $M \times [0, \frac{a}{C}]$ *alors* $|\nabla^n R| \leqslant \frac{C_n C}{t^{n/2}}$ *sur* $M \times]0, \frac{a}{C}]$

Cette inégalité est dite de type BBS (noms de Bernstein, Bando, Shi).

3.2 Existence en temps long.

On va prouver que le flot Ricci existe pour tout t $\geqslant 0$. La philosophie générale est la suivante : tant que la courbure reste bornée, le flot peut être prolongé. Autrement dit, le seul obstacle possible à l'avancée du flot de Ricci est l'explosion de la courbure, ce qui, sur les surfaces, par chance (car c'est une spécificité de la dimension 2), ne se produit pas. Une telle situation est comparable au principe de majoration a priori pour les équations différentielles.

Plus précisément, soit (M,g_0) donnée, on sait d'après l'existence en temps petit qu'il existe un flot de Ricci pour cette condition initiale, défini sur un intervalle de temps de longueur strictement positive. Supposons par l'absurde qu'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $[0, T[$ soit l'intervalle maximal sur lequel g(t) existe. Cet intervalle est ouvert en T, en effet, s'il était fermé, on pourrait prolonger g au-delà grâce à l'existence en temps petit. Pour obtenir une contradiction, il suffit donc de montrer que g peut être prolongée en une métrique C^∞en T sous l'hypothèse qu'il existe une constante C telle que $|R| \leqslant$ C sur M $\times$ $[0, T[$ (hypothèse acquise d'après le théorème 8). On résume ci-dessous les principales étapes de la démonstration:

Démonstration grâce à l'équation du flot de Ricci que g est uniformément bornée sur $[0, T[$

Démonstration que g peut être prolongée continûment en T (utilisation du critère de Cauchy pour les fonctions)

Pour montrer que ce prolongement est de classe C^∞, il suffit de montrer que les dérivées de g et de R à travers une carte sont uniformément bornées : démonstration de ce dernier point par récurrence sur l'ordre de dérivation et utilisation des inégalités BBS.

3.3 Convergence de la métrique quand $r < 0$.

Soit (M,g_0) donnée avec r<0. D'après ce qui précède, il existe sur M un flot de Ricci défini sur $\mathbb{R}^+$ (3.2) et tel que $R \to r$ quand $t \to +\infty$ (2.4). En reprenant l'idée de la démonstration des inégalités BBS, on peut montrer que les dérivées successives de R tendent exponentiellement vite vers 0 quand $t \to +\infty$. En utilisant un argument de prolongement similaire à (3.2), on peut alors construire une métrique limite g_∞ de courbure constante égale à r. g_∞ est conforme à g_0, ce qui finit la démonstration du théorème d'uniformisation dans le cas où $r < 0$.

BIBLIOGRAPHIE

Références générales sur la géométrie différentielle et la géométrie riemannienne :

S.GALLOT, D.HULIN, J.LAFONTAINE, « Riemannian Geometry », Universitext, Springer, 1990

J.LAFONTAINE, « Introduction aux Variétés Différentielles » collection Grenoble Sciences , Grenoble, 1996

L'article fondateur d'Hamilton :

R.S.HAMILTON, « The Ricci flow on surfaces », Math. and General Relativity, Contemporary Math, 71, 1988, 237-262

Livre de reférence sur le flot de Ricci, où l'on pourra trouver les cas $r = 0$ et $r > 0$:

B. CHOW, D.KNOPF, « The Ricci flow : an introduction » volume 110 de Mathematical surveys and monographs, AMS 2004

Pour une démonstration du théorème de Hodge, chapitre 6 de:

F.WARNER, « Foundations of differential manifolds and Lie groups », Springer, New-York,1983