ETH Zürich
Prof. Dr. A. Iozzi

Winter 2016

Lösungsskizze zur Prüfung

1. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen: **(12 P)**

a) Die PDE
$$x f_{xx} + 3y^2 f_x + y f_{yy} = 0$$
ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ elliptisch.

Lösung.
Ausgehend von der allgemeinen Form
$$A(x, y) f_{xx} + 2B(x, y) f_{xy} + C(x, y) f_{yy} = F(x, y, f, f_x, f_y)$$
erhalten wir mit
$$A = x,\ B = 0,\ C = y \quad \Rightarrow \quad AC - B^2 = xy$$
und somit ist die PDE nicht elliptisch für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Die Aussage ist falsch.

b) Ist $u(x, t)$ die Lösung der Gleichung
$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = e^x \\ u_t(x, 0) = \pi \end{cases}$$
so gilt so gilt $u(0, 2) = \sinh(2c)$..

Lösung.
Die Funktion u löst die eindimensionale Wellengleichung, deshalb erhalten wir mit der Formel von d'Alembert
$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}\left(e^{x+ct} + e^{x-ct}\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \pi \, ds \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{x+ct} + e^{x-ct}\right) + \frac{1}{2c}\pi s\Big|_{x-ct}^{x+ct} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{x+ct} + e^{x-ct}\right) + \pi t. \end{aligned}$$

Das heisst

$$u(0,2) = \frac{1}{2}\left(e^{2c} + e^{-2c}\right) + 2\pi = \cosh(2c) + 2\pi,$$

somit ist die Aussage falsch.

c) Löst die Funktion $u(x, y)$ die Gleichung $\nabla^2 u = 0$ auf dem Gebiet

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-1)^2 + y^2 \leq 16\}$$

unter der Bedingung

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} - 2, \quad \text{für alle } (x, y) \text{ mit } x^2 + y^2 = 2,$$

so gilt $u(0, 0) = -2$.

Lösung.
Die Funktion u ist harmonisch, also gilt der Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} u(0,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(2\cos(\varphi), 2\sin(\varphi))\, d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2(\varphi) - 1)\, d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\varphi) - \varphi\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Somit ist die Aussage falsch.

2. Finden Sie mit Hilfe der Laplacetransformation die Lösung $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Integralgleichung **(6 P)**

$$6f(t) = 2t^3 + \int_0^t (t-\tau)^3 f(\tau)\, d\tau.$$

Lösung.
Das Integral ist per Definition die Faltung der Funktionen $f(t)$ und t^3, somit kann die Gleichung umgeschrieben werden,

$$6f(t) = 2t^3 + t^3 * f(t).$$

Laplacetransformation und der Faltungssatz liefern dann

$$\begin{aligned}6\mathscr{L}(f(t))(s) &= 2\mathscr{L}(t^3)(s) + \mathscr{L}(t^3 * f(t))(s)\\ &= 2\mathscr{L}(t^3)(s) + \mathscr{L}(t^3)(s)\mathscr{L}(f(t))(s)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathscr{L}(f(t))(s)\left(6 - \mathscr{L}(t^3)(s)\right) = 2\mathscr{L}(t^3)(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathscr{L}(f(t))(s)\left(\frac{6(s^4-1)}{s^4}\right) = \frac{12}{s^4}$$

$$\mathscr{L}(f(t))(s) = \frac{2}{s^4-1} = \frac{2}{(s^2-1)(s^2+1)} = \frac{2}{(s-1)(s+1)(s^2+1)}.$$

Mittels Partialbruchzerlegung findet man ausserdem

$$\frac{2}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2},\ C = 0,\ D = -1$$

und somit ergibt sich für die gesuchte Lösung

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\\ &= \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2} - \sin(t).\end{aligned}$$

3. Gesucht ist die Lösung $u(x,t)$ des Anfangswertproblems **(15 P)**

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0\\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t \geq 0\\ u(x,0) = 5 + 3\cos(2x), & 0 \leq x \leq \pi\\ u_t(x,0) = 2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Lösung.
Der Separationsansatz $u(x,t) = F(x)G(t)$ liefert mit

$$\frac{F''}{F} = \frac{\ddot{G}}{c^2 G} = k$$

die beiden ODE's

$$\begin{cases} F'' = kF\\ \ddot{G} = c^2 k G \end{cases}$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist. Desweiteren ist

$$\begin{aligned}u_x(0,t) &= F'(0)G(t) = 0,\ \text{für alle } t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad F'(0) = 0\\ u_x(\pi,t) &= F'(\pi)G(t) = 0,\ \text{für alle } t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad F'(\pi) = 0.\end{aligned}$$

Um das Vorzeichen von k zu fixieren, betrachten wir die ODE

$$\begin{cases} F'' = kF \\ F'(0) = F'(\pi) = 0 \end{cases}$$

für die drei Fälle

- $k > 0$: Die allgemeine Lösung ist in diesem Fall ist $F(x) = Ae^{\sqrt{k}x} + Be^{-\sqrt{k}x}$ und mit den Randbedingungen finden wir, dass nur die triviale Lösung in Frage kommt.
- $k < 0$: Die allgemeine Lösung ist in diesem Fall ist $F(x) = A\cos(\sqrt{-k}x) + B\sin(\sqrt{-k}x)$ und mit den Randbedingungen erhalten wir $B = 0$ und $k = -n^2$ und somit $F_n = A_n \cos(nx)$, wobei wir $A_n = 1$ setzen können.
- $k = 0$: In diesem Fall haben wir $F(x) = ax + b$ und mit den Randbedingungen ergibt sich $F_0(x) = b$.

Für diese Werte von k finden wir für die zweite ODE $\ddot{G} = c^2 kG = -c^2 n^2 G$, dass

$$G_0(t) = ct + d, \quad G_n(t) = C_n \cos(cnt) + D_n \sin(cnt).$$

Mit dem Superpositionsprinzip ergibt sich somit

$$u(x,t) = F_0 G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n G_n := \alpha t + \beta + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos(cnt) + D_n \sin(cnt)) \cos(nx).$$

Die erste Randbedingungen liefert

$$u(x,0) = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(nx) = 5 + 3\cos(2x)$$

also

$$\beta = 5, \quad C_n = 0, \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}, \quad C_2 = 3,$$

und mit der zweiten erhalten wir

$$u_t(x,0) = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} D_n cn \cos(nx) = 2,$$

i.e.

$$D_n = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \quad \alpha = 2.$$

Die gesuchte Lösung ist also

$$u(x,t) = 5 + 2t + 3\cos(2ct)\cos(2x).$$

4. Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^x - 1$, für $0 < x < \pi$. **(12 P)**

a) Bestimmen Sie die ungerade Fortsetzung f_u von f zu einer 2π-periodischen Funktion.

Lösung.

$$f_u(x) = \begin{cases} -e^{-x} + 1, & -\pi < x < 0 \\ e^x - 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

b) Berechnen Sie die Fourierreihe von f_u.

Lösung.
Für die Koeffizienten erhalten wir

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_u(x) \sin(nx)\, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} (e^x - 1) \sin(nx)\, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{e^x - 1}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} e^x \cos(nx)\, dx \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{e^x - 1}{n} (-1)^n + \frac{1}{n(n^2+1)} \left(e^{\pi}(-1)^n - 1 \right) \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n(n^2+1)} - \frac{e^{\pi}(-1)^n n}{(n^2+1)} \right)
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

wobei wir im fünften Schritt verwendet haben, dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\int_0^\pi e^x\cos(nx)\,dx &= \frac{e^x}{n^2}\sin(nx)\Big|_0^\pi - \frac{1}{n^2}\int_0^\pi e^x\sin(nx)\,dx\\
&= \frac{e^x}{n^3}\cos(nx)\Big|_0^\pi - \frac{1}{n^3}\int_0^\pi e^x\cos(nx)\,dx\\
&= \frac{1}{n^3}\left(e^\pi(-1)^n-1\right) - \frac{1}{n^3}\int_0^\pi e^x\cos(nx)\,dx\\
\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)\int_0^\pi e^x\cos(nx)\,dx &= \frac{1}{n^3}\left(e^\pi(-1)^n-1\right)\\
\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n}\int_0^\pi e^x\cos(nx)\,dx &= \frac{1}{n(n^2+1)}\left(e^\pi(-1)^n-1\right).
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Fourierreihe

$$f_u(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n(n^2+1)} - \frac{e^\pi(-1)^n n}{(n^2+1)}\right)\sin(nx)$$

c) Lösen Sie nun für $t>0$ die PDE

$$\begin{cases} u_t = c^2u_{xx}, & t>0,\ 0<x<\pi\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & t\geq 0\\ u(x,0)=f_u(x), & 0\leq x\leq \pi. \end{cases}$$

Hinweis: Die aus der Vorlesung bekannte allgemeine Lösung der PDE kann ohne erneute Herleitung verwendet werden.

Lösung.
Die allgemeine Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung ist in diesem Fall

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty b_n\sin(nx)e^{-c^2n^2t}$$

und die Anfangsbedingung und **b)** liefern

$$u(x,0) = f_u(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n(n^2+1)} - \frac{e^\pi(-1)^n n}{(n^2+1)}\right)\sin(nx) = \sum_{n=1}^\infty b_n\sin(nx).$$

Somit ergibt sich für die gesuchte Lösung

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n(n^2+1)} - \frac{e^\pi(-1)^n n}{(n^2+1)}\right)\sin(nx)e^{-c^2n^2t}.$$

Siehe nächstes Blatt!

5. Sei f eine Funktion mit **(13 P)**

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

a) Finden Sie die Fouriertransformierte von $f(x)$.

Lösung.
Für $w \neq 0$ erhalten wir für die Fouriertransformierte

$$\begin{aligned}
\hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} (1 - x^2) e^{-iwx}\, dx \\
&= -\frac{(1 - x^2)}{iw\sqrt{2\pi}} e^{-iwx} \Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{iw}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^{1} x e^{-iwx}\, dx \\
&= \frac{1}{iw}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-\frac{x}{iw} e^{-iwx} \Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{iw} \int_{-1}^{1} e^{-iwx}\, dx \right) \\
&= \frac{1}{iw}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-\frac{1}{iw}(e^{-iw} + e^{iw}) + \frac{1}{w^2} e^{-iwx} \Big|_{-1}^{1} \right) \\
&= -\frac{1}{w^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(e^{-iw} + e^{iw}) - \frac{1}{iw^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(e^{-iw} - e^{iw}) \\
&= -2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{w\cos(w) - \sin(w)}{w^3} \right).
\end{aligned}$$

Den Fall $w = 0$ berechnet man entweder durch direktes Einsetzen

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

oder via Grenzwert

$$\lim_{w\to 0} -2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{w\cos(w) - \sin(w)}{w^3} \right) \overset{\text{BdH}}{=} 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{w\to 0} \frac{\sin(w)}{3w} \overset{\text{BdH}}{=} \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{w\to 0} \cos(w) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

b) Berechnen Sie anschliessend

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^3} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\, dx.$$

Lösung.
Es ist

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} \, dw$$

und somit erhalten wir aus **a)**

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{w\cos(w) - \sin(w)}{w^3} e^{iwx} \, dw \\ &= -\frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{w\cos(w) - \sin(w)}{w^3} \cos(wx) \, dw - \frac{2i}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{w\cos(w) - \sin(w)}{w^3} \sin(wx) \, dw \\ &= -\frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{w\cos(w) - \sin(w)}{w^3} \cos(wx) \, dw \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass

$$\frac{w\cos(w) - \sin(w)}{w^3} \sin(wx)$$

eine ungerade Funktion und somit das Integral zwischen $-\infty$ und ∞ verschwindet. Für $x = \frac{1}{2}$ erhalten wir auf der linken Seite

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{3}{4}$$

und rechts

$$-\frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{w\cos(w) - \sin(w)}{w^3} \cos\left(\frac{w}{2}\right) \, dw = -\frac{4}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{w\cos(w) - \sin(w)}{w^3} \cos\left(\frac{w}{2}\right) \, dw$$

und somit

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{w\cos(w) - \sin(w)}{w^3} \cos\left(\frac{w}{2}\right) \, dw = -\frac{3\pi}{16}.$$