ETH Zürich
Prof. Dr. A. Iozzi

Winter 2016

Prüfung Analysis III
D–MAVT, D–MATL

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi Nr.:	

Bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
Total		

Bitte nicht ausfüllen!

Vollständigkeit	

ETH Zürich | Winter 2016
Prof. Dr. A. Iozzi

Wichtig:

- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es im Gepäck.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Schreiben Sie auf alle Blätter Ihren Namen und füllen Sie das Deckblatt aus.
- Es wird erwartet, dass Sie Ihre Antworten begründen. Notieren Sie alle Zwischenresultate und Lösungswege.
- Die allgemeinen Lösungen für PDE's, welche in der **Vorlesung** hergeleitet wurden, dürfen verwendet werden. Dies gilt **nicht** für Lösungen, die in den Übungen hergeleitet wurden!
- Geben Sie pro Aufgabe nur **eine** Lösung ab.
- Schreiben Sie **nicht** mit **Bleistift**, **roter** oder **grüner Farbe** und verwenden Sie **keinen Tipp-Ex**.

Zugelassene Hilfsmittel:

- Notizen auf 10 beidseitig beschriebenen A4-Blättern.
- ein Wörterbuch.
- **keine** Formelsammlungen.
- **kein** Handy.

Laplacetransformation:

	$f(t)$	$\mathscr{L}(f)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	t^2	$\frac{2!}{s^3}$
4	t^n, $n \in \mathbb{N}_0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

	$f(t)$	$\mathscr{L}(f)$
5	t^a, $a > 0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
7	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
8	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

	$f(t)$	$\mathscr{L}(f)$
9	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
10	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
11	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
12	$\delta(t-a)$	e^{-as}

(Γ=Gammafunktion, u=Heavisidefunktion, δ=Deltafunktion)

1. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die PDE
$$x f_{xx} + 3y^2 f_x + y f_{yy} = 0$$
ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ elliptisch.

b) Ist $u(x, t)$ die Lösung der Gleichung
$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = e^x \\ u_t(x, 0) = \pi \end{cases}$$
so gilt $u(0, 2) = \sinh(2c)$.

c) Löst die Funktion $u(x, y)$ die Gleichung $\nabla^2 u = 0$ auf dem Gebiet
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-1)^2 + y^2 \leq 16\}$$
unter der Bedingung
$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} - 2, \quad \text{für alle } (x, y) \text{ mit } x^2 + y^2 = 2,$$
so gilt $u(0, 0) = -2$. **(12 P)**

2. Finden Sie mit Hilfe der Laplacetransformation die Lösung $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Integralgleichung
$$6f(t) = 2t^3 + \int_0^t (t - \tau)^3 f(\tau)\, d\tau.$$
(6 P)

3. Gesucht ist die Lösung $u(x, t)$ des Anfangswertproblems
$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 5 + 3\cos(2x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = 2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$
(15 P)

4. Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^x - 1$, für $0 < x < \pi$.

a) Bestimmen Sie die ungerade Fortsetzung f_u von f zu einer 2π-periodischen Funktion.

b) Berechnen Sie die Fourierreihe von f_u.

c) Lösen Sie nun für $t > 0$ die PDE

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f_u(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Hinweis: Die aus der Vorlesung bekannte allgemeine Lösung der PDE kann ohne erneute Herleitung verwendet werden.

(12 P)

5. Sei f eine Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

a) Finden Sie die Fouriertransformierte von $f(x)$.

b) Berechnen Sie anschliessend

$$\int_0^\infty \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^3} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\, dx.$$

(13 P)

VIEL ERFOLG!