D-ITET | Analysis III | Frühling 2008
A. Iozzi

# Blockprüfung / 2. Vordiplom

**Allgemeine Hinweise:**

- Lies zuerst alle Aufgaben durch. Verweile nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Schwierigkeiten bereitet.
- Alle Aufgabe haben das gleiche Gewicht von 12 Punkten. Die maximal mögliche Punktzahl beträgt 60 Punkte. Für die Höchstnote sind nicht alle alle Punkte erforderlich!
- Notiere alle Zwischenresultate und Rechenschritte und begründe die Resultate.
- Bitte verwende für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Bitte schreibe auf **alle** abzugebenden Blätter Deinen Namen, fülle den Kopf des Deckblattes aus und notiere dort Deine Leginummer.
- Vergiss nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

**Erlaubte Hilfsmittel:**

- 20 A4-Seiten (10 A4-Blätter) selbstverfasst von Hand oder getippt;
- **keine** sonstige Literatur;
- **kein** Taschenrechner;
- **kein** Mobiltelephon.

## Viel Erfolg!

**Bitte wenden!**

1. **Kurze Fragen**

   **a)** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie, dass eine harmonische Funktion auf $\Omega$ eindeutig durch die Randbedingungen bestimmt ist (kurze Begründung genügt).

   **b)** Unter hinreichenden Annahmen für $f$ löst folgende Funktion welches Anfangswertproblem auf $\mathbb{R}$?

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \quad x \in \mathbb{R}.$$

   **c)** Auf welchen Gebieten in $\mathbb{R}^2$ ist folgende partielle Differentialgleichung elliptisch, hyperbolisch, parabolisch bzw. nicht klassifizierbar:

$$(-x^2+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (-y^2+1)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

   **d)** Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\delta_y(sin(x)) f(x)) dx,$$

   wobei $f(x) = e^{-|x|}$ und $y = 0$.

2. **Wärmeleitungsgleichung**
   Gegeben sei ein homogener Stab der Länge $L$. Die Enden des Stabes haben die konstante Temperatur 0. Die Anfangstemperatur des Stabes sei gegeben durch die Funktion $\sin(\frac{\pi x}{L})$. Zur Zeit $t = 0$ wird ein elektrischer Stom eingeschaltet, der durch den Stab fliesst und darin pro Längeneinheit eine konstante Wärmemenge erzeugt. Man studiere den Temperaturverlauf.

   Die mathematische Formulierung des Problems lautet:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + b && \text{für } 0 \leqslant x \leqslant L,\, t > 0, && \text{(PDE)} \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0 && \text{für } t \geqslant 0, && \text{(RB)} \\ u(x,0) &= \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) && \text{für } 0 \leqslant x \leqslant L. && \text{(AB)} \end{aligned}$$

   Dabei ist $b > 0$ eine gegebene positive reelle Zahl.

   **Hinweis:** Die PDE ist inhomogen. Man suche deshalb zuerst eine stationäre Lösung $u^* : x \mapsto u^*(x)$ der Gleichung (PDE) und der Randbedingung (RB). Man setze dann $u(x,t) = u^*(x) + v(x,t)$ und bestimme $v$. Die Funktion $v$ erfüllt dann eine homogene partielle Differentialgleichung.

**Siehe nächstes Blatt!**

3. **Laplace Gleichung**
Sei $u : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die folgende Bedingungen erfüllt ($k \in \mathbb{N}$):

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u(x,0) = 1 - x & x \in [0,1] \\ u(0,y) = 1 - y & y \in [0,1] \\ u(1,y) = y & y \in [0,1] \\ u(x,1) = \sin^3(k\pi x) + x & x \in [0,1]. \end{cases} \tag{1}$$

Ermitteln Sie $u$. Gehen Sie dazu folgendermassen vor:

**a)** Finden Sie eine Funktion $v$ der Form $ax + bxy + cy + d$, welche die ersten drei Randbedingungen erfüllt.

**b)** Verwenden Sie die erste Teilaufgabe, um das obige Problem auf ein Problem mit drei homogenen Bedingungen zu reduzieren: Schreiben Sie $u = v + w$ und ermitteln Sie $w$ mit Hilfe des Seperationsansatzes.

4. **Wellengleichung**

**a)** Lösen Sie folgende Wellengleichung auf $\mathbb{R}$, wobei $a > 0$:

$$\begin{cases} c^2 u_{xx} = u_{tt} & \text{auf } \mathbb{R} \\ u(x,0) = \left(\frac{1}{2}x^4 - ax^3 + \frac{1}{2}a^3 x\right) \chi_{[0,a]} & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \sin(x\pi/a)\, \chi_{[0,a]} & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Hierbei ist

$$\chi_{[0,a]}(x) := \begin{cases} 1 & x \in [0,a] \\ 0 & x \notin [0,a] \end{cases} \tag{2}$$

Skizzieren Sie den Graph von $u$ zu geeigneten Zeitpunkten $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{a}{2c}$ und $t_2 = \frac{10a}{2c}$.

**b)** Die Auslenkung $u(x,t)$ einer an den Stellen $x = 0$ und $x = a$ eingespannten Saite sei beschrieben durch das Rand- und Anfangswertproblem

$$\begin{cases} c^2 u_{xx} = u_{tt} & \text{auf } (0,a) \\ u(x,0) = \frac{1}{2}x^4 - ax^3 + \frac{1}{2}a^3 x & x \in [0,a] \\ u_t(x,0) = \sin(x\pi/a) & x \in [0,a] \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(a,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Bestimme eine Lösung des Problems nach der Methode von d'Alambert, indem Sie das Problem auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen.
**Hinweis:** Begründen Sie, warum es sinnvoll ist zu diesem Zwecke die Anfangsbedingungen $2a$-periodisch ungerade fortzusetzen.

**Bitte wenden!**

**5. Green Funktion**

Sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ der erste Quadrant ($Q := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$) und $u$ eine Funktion, die folgende Bedingung erfüllt:

$$\begin{cases} \Delta u = e^{-x_1 - x_2}(1 - x_1) & \text{in } Q \\ \quad u = 0 & \text{auf } \partial Q. \end{cases}$$

**a)** Die Greenfunktion für die obere Halbebene ($H = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$) ist gegeben durch

$$G_H(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{|x - y|}{|x - y^*|},$$

wobei $y^* = (y_1, -y_2)$. Verwenden Sie dieses Resultat und die Transformation

$$\Phi : Q \to H, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1^2 - x_2^2, 2x_1 x_2),$$

um die Green Funktion $G_Q$ für den ersten Quadranten zu finden: Zeigen Sie, dass $G_Q(x, y) = G_H(\Phi(x), \Phi(y))$

**Hinweis:** Man kann das Problem auch in der oberen Halbebene in $\mathbb{C}$ betrachten. Dann entspricht die Transformation genau der Abbildung $z \mapsto z^2$ und die Abbildung $y \mapsto y^*$ entspricht $z \mapsto \bar{z}$.

**b)** Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe a), um einen Ausdruck für $u$ zu ermitteln.

[*Gesamtpunktzahl: 60 Punkte*]