ETH Zürich
Prof. Dr. A. Iozzi

Winter 2014

Klausur Analysis III

D–MAVT, D–MATL

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi Nr.:	

Bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total		

Vollständigkeit	

Wichtig:

- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Es wird erwartet, dass Sie Ihre Anworten begründen. Notieren Sie alle Zwischenresultate und Lösungswege.
- Hinter jeder Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Bitte benutzen Sie keine Bleistifte oder rote oder grüne Kugelschreiber.
- Schreiben Sie auf alle abgegebenen Blätter Ihren Namen und füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus.
- Vergessen Sie nicht, alle Blätter abzugeben.

Zugelassene Hilfsmittel:

- Notizen auf 10 beidseitig beschriebenen A4-Blättern.
- ein Wörterbuch.
- **keine** Formelsammlungen.
- **keine** Taschenrechner.
- **kein** Handy.

1. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Laplace-Transformierte der Funktion $f(t) = t\sin(t)\cos(t)$ ist

$$F(s) = \frac{2s}{(s^2+4)^2}.$$

(5 P)

b) Wenn $y(x)$ die Gleichung

$$y'' - x^2 y = 0$$

löst, dann löst die Fourier-Transformierte $Y(w) = \mathscr{F}(y(x))(w)$ die Gleichung

$$Y'' - w^2 Y = 0.$$

(3 P)

c) Wenn $f(x,y)$ die Gleichung $\Delta f = 0$ auf der Einheitskreisscheibe $D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\,\}$ erfüllt und

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow f(x,y) = x + y$$

gilt, dann folgt $f(0,0) = 1$. **(3 P)**

d) Sei $u(x,t)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} \\ u(x,0) &\equiv 0 \\ u_t(x,0) &= g(x) \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$. Falls

$$|x| > 1 \Rightarrow g(x) = 0,$$

dann ist $u(1,t)$ konstant für alle $t \geq 2$. **(4 P)**

2. Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y''(t) + y(t) &= -2\sin(t) + 3\delta(t-2\pi), \quad \text{für } t > 0, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 1, \end{aligned}$$

wobei δ die Dirac'sche Deltafunktion ist. **(9 P)**

3. Wir betrachten die Funktion $f : (0,\pi) \to \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x) = (\pi - x)\cos(x), \text{ für } 0 < x < \pi$$

gegeben ist.

a) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe der ungeraden 2π-periodischen Fortsetzung von f.

Bitte wenden!

b) Sei $R(x)$ die Fourier-Reihe aus Teilaufgabe (a). Zeigen Sie oder widerlegen Sie

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} R(x) = R(0).$$

(11 P)

4. Finden Sie die Funktion $u(x,t)$, welche die Auslenkung einer schwingenden Saite beschreibt, die zwischen den Punkten $x = 0$ und $x = 2$ eingespannt ist, unter den Anfangsbedingungen:

$$u(x,0) = 0 \quad \text{und} \quad u_t(x,0) = \sin^3(\pi x).$$

Dabei wird angenommen, dass sich harmonische Wellen mit der Geschwindigkeit $c = 1$ entlang der Saite ausbreiten. **(9 P)**

5. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{2} u_{xx}, \\ u(x,0) &= x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}, \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$, mittels Fourier-Transformation bezüglich der Variablen x.

Hinweis: Es darf für diese Aufgabe als bekannt vorausgesetzt werden, dass für $a > 0$:

$$\mathscr{F}\left(x\mathrm{e}^{-ax^2}\right)(w) = \frac{\mathrm{i}w}{(2a)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{w^2}{4a}}.$$

(6 P)

6. **a)** Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ des Anfangs-Randwertproblems:

$$\begin{aligned} u_t &= c^2 u_{xx}, \\ u_x(0,t) &= 0 = u_x(\pi,t), \\ u(x,0) &= \cos^2(x), \end{aligned}$$

wobei $0 < x < \pi$ und $t > 0$ sowie $c > 0$.

b) Bestimmen Sie die Lösung $v(x,t)$ des Anfangs-Randwertproblems:

$$\begin{aligned} v_t &= c^2 v_{xx} - \alpha t v, \\ v_x(0,t) &= 0 = v_x(\pi,t), \\ v(x,0) &= \cos^2(x), \end{aligned}$$

wobei $0 < x < \pi$ und $t > 0$ sowie $c, \alpha > 0$.

Hinweis: Versuchen Sie das Problem auf (a) zu reduzieren, durch einen Ansatz $v(x,t) = f(t)u(x,t)$. **(9 P)**

VIEL ERFOLG!