ETH Zürich
Prof. Dr. A. Iozzi

Winter 2015

Lösungsskizze zur Prüfung

1. Finden Sie mittels Laplacetransformation die Lösung $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Integralgleichung

$$f(t) = \cos(t) + \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

Lösung.

Entweder:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(f)(s) &= \mathscr{L}(\cos(t))(s) + \mathscr{L}\left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right)(s) \\ &= \frac{s}{s^2+1} + \frac{\mathscr{L}(f)(s)}{s} \\ \Leftrightarrow \quad \mathscr{L}(f)(s) &= \frac{s^2}{(s^2+1)(s-1)} \end{aligned}$$

Oder:

Setzt man

$$\begin{aligned} g : [0, \infty) &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto g(t) = 1 \end{aligned}$$

so kann die Gleichung umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(t) + \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau \\ &= \cos(t) + f(t) * g(t). \end{aligned}$$

Laplace-Transformation beider Seiten liefert

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(f)(s) &= \mathscr{L}(\cos(t))(s) + \mathscr{L}(f * g)(s) \\ &= \frac{s}{s^2+1} + \mathscr{L}(f)(s)\mathscr{L}(g)(s) \\ &= \frac{s}{s^2+1} + \mathscr{L}(f)(s)\mathscr{L}(1)(s) \\ &= \frac{s}{s^2+1} + \mathscr{L}(f)(s)\frac{1}{s} \\ \Leftrightarrow \quad \mathscr{L}(f)(s) &= \frac{s^2}{(s^2+1)(s-1)}. \end{aligned}$$

In beiden Fällen findet man mittels Partialbruchzerlegung ausserdem

$$\frac{s^2}{(s^2+1)(s-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s-1}\right)$$

und somit

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) + \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}e^t. \end{aligned}$$

(6 P)

2. Bestimmen Sie für $t > 0$ die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = e^{2t}u(t-2) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

wobei u die Heaviside Funktion ist.

Lösung.
Die linke Seite transformiert sich zu

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(y'' - 4y' + 4y)(s) &= s^2\mathscr{L}(y)(s) - sy(0) - y'(0) - 4s\mathscr{L}(y)(s) + 4y(0) + 4\mathscr{L}(y) \\ &= (s^2 - 4s + 4)\mathscr{L}(y) - s + 5 \\ &= (s-2)^2\mathscr{L}(y) - s + 5 \end{aligned}$$

und rechts erhalten wir

$$\mathscr{L}(e^{2t}u(t-2)) = \frac{e^{-2(s-2)}}{s-2} = e^4\frac{e^{-2s}}{s-2},$$

also

$$\mathscr{L}(y) = \frac{s-5}{(s-2)^2} + e^4\frac{e^{-2s}}{(s-2)^3}.$$

Für die Rücktransformation des ersten Terms bringen wir diesen mittels Partialbruchzerlegung erst auf die Form

$$\frac{s-5}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} - \frac{3}{(s-2)^2},$$

und der erste Verschiebungssatz (s-shifting) liefert dann

$$\frac{1}{s-2} - \frac{3}{(s-2)^2} = \mathscr{L}(e^{2t})(s) - 3\mathscr{L}(e^{2t}t)(s).$$

Der zweite Term ist

$$\begin{aligned} e^4 \frac{e^{-2s}}{(s-2)^3} &= \frac{e^4}{2} e^{-2s} \mathscr{L}(e^{2t}t^2)(s) \\ &= \frac{e^4}{2} \mathscr{L}(u(t-2)e^{2(t-2)}(t-2)^2)(s) \\ &= \frac{1}{2} \mathscr{L}(u(t-2)e^{2t}(t-2)^2)(s). \end{aligned}$$

Somit ist also

$$\mathscr{L}(y)(s) = \mathscr{L}(e^{2t})(s) - 3\mathscr{L}(e^{2t}t)(s) + \frac{1}{2}\mathscr{L}(u(t-2)e^{2t}(t-2)^2)(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = e^{2t}\left((1-3t) + \frac{1}{2}u(t-2)(t-2)^2\right) = \begin{cases} e^{2t}(3-5t+\frac{t^2}{2}), & t > 2 \\ e^{2t}(1-3t), & t \leq 2 \end{cases}$$

(10 P)

3. Lösen Sie für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ das folgende Anfangswertproblem mittels Fouriertransformation bezüglich x

$$\begin{cases} t^2 u_x - u_t = 0 \\ u(x,0) = 3\cos(x), \end{cases}$$

und zwar ohne die Fouriertransformierte von $3\cos(x)$ explizit zu berechenen.

Lösung.
Wenden wir Fouriertransformation (in x) auf beiden Seiten der Gleichung an, so erhalten wir mit Hilfe der Ableitungsregel

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(w,t) = \mathcal{F}(u_t) = \mathcal{F}(t^2 u_x)(w) = t^2\mathcal{F}(u_x)(w) = iwt^2\mathcal{F}(u)(w) = iwt^2\hat{u}(w,t),$$

und die Anfangsbedingung zu

$$\hat{u}(w,0) = \mathcal{F}(3\cos(x))(w) =: \hat{f}(w).$$

Das transformierte Problem ist

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\hat{u} = iwt^2\hat{u} \\ \hat{u}(w,0) = \hat{f}(w) \end{cases}$$

mit der Lösung

$$\hat{u}(w,t) = \hat{f}(w)e^{iw\frac{t^3}{3}}$$

Rücktransformation ergibt

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(w,t) e^{iwx}\, dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iw\frac{t^3}{3}} e^{iwx}\, dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iw\left(x+\frac{t^3}{3}\right)}\, dw \\
&= f\left(x + \tfrac{t^3}{3}\right) \\
&= 3\cos\left(x + \tfrac{t^3}{3}\right).
\end{aligned}
$$

(6 P)

4. a) Bestimmen Sie die Fourierreihe der Funktion

$$f(x) = |x\cos(x)|, \quad -\pi < x < \pi.$$

Lösung.
Die Fourierreihe einer 2π-periodischen Funktion ist von der Form

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Da es sich hier um eine gerade Funktion handelt, sind die Koeffizienten $b_n = 0$ und

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x\cos(x)|\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |x\cos(x)|\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\, dx - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos(x)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(x\sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, dx \right) - \frac{1}{\pi} \left(x\sin(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)\, dx \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\tfrac{\pi}{2}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \cos(0) + \tfrac{\pi}{2}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \cos(\pi) \right) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

 Siehe nächstes Blatt!

Um a_n zu berechnen, verwenden wir die trigonometrische Identität

$$\cos(x)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left(\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)\right)$$

und erhalten für $n \neq 1$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x\cos(x)|\cos(nx)\,dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)\right)\,dx}_{\mathbf{I}} \\
&\quad \underbrace{-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\left(\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)\right)\,dx}_{\mathbf{II}}
\end{aligned}$$

Beide Integrale haben dieselbe Stammfunktion:

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{\pi}\left(\frac{\sin((n+1)x)}{n+1} + \frac{\sin((n-1)x)}{n-1}\right) - \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{\sin((n+1)x)}{n+1} + \frac{\sin((n-1)x)}{n-1}\right)\,dx \\
=&\frac{x}{\pi}\left(\frac{\sin((n+1)x)}{n+1} + \frac{\sin((n-1)x)}{n-1}\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos((n+1)x)}{(n+1)^2} + \frac{\cos((n-1)x)}{(n-1)^2}\right)
\end{aligned}$$

Berechnung von I

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{n+1} + \frac{\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{n-1}\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)^2} + \frac{\cos\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n-1)^2}\right) \\
&-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2}\right)
\end{aligned}$$

Berechnung von II

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{n+1} + \frac{\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{n-1}\right) \\
&-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)^2} + \frac{\cos\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n-1)^2}\right)
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
a_n =& \left(\frac{\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{n+1} + \frac{\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{n-1}\right) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)^2} + \frac{\cos\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n-1)^2}\right)\\
&-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2}\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)^2}\right)\\
=& \left(\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n+1} - \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n-1}\right) + \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(n+1)^2} + \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(n-1)^2}\right)\\
&-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2}\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)^2}\right),
\end{aligned}
$$

wobei wir im letzten Schritt folgende Relationen verwendet haben (Additionstheoreme):

$$
\sin\left((n\pm 1)\tfrac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right), \quad \cos\left((n\pm 1)\tfrac{\pi}{2}\right) = \mp\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right).
$$

Mit

$$
\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2j, \\ (-1)^j, & n = 2j+1, \end{cases} \qquad \cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^j, & n = 2j, \\ 0, & n = 2j+1. \end{cases}
$$

erhalten wir nun

$$
\begin{aligned}
a_{2j} &= \frac{(-1)^j}{2j+1} - \frac{(-1)^j}{2j-1} = -\frac{2(-1)^j}{4j^2-1} = \begin{cases} -\frac{2}{16k^2-1}, & j = 2k \\ \frac{2}{4(2k+1)^2-1}, & j = 2k+1 \end{cases}\\
a_{2j+1} &= \frac{2j(-1)^j - 2j^2 + (-1)^j - 2j - 1}{2\pi j^2(j+1)^2} = -\frac{1}{\pi(2k+1)^2}, \quad \text{für } j = 2k \text{ und } j = 2k+1.
\end{aligned}
$$

Im Fall $n = 1$ ist

$$
a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x\cos(x)|\cos(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\cos(2x)+1\right)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\left(\cos(2x)+1\right)\,dx.
$$

wobei die beiden Integrale die Stammfunktion

$$
\frac{1}{\pi}\int x\left(\cos(2x)+1\right)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x\sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4}\right)
$$

haben. Einsetzen der Grenzen liefert schliesslich

$$
a_1 = -\frac{\pi^2+4}{4\pi}.
$$

Siehe nächstes Blatt!

Somit ist die gesuchte Fourierreihe

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 \cos(x) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos(nx) \\
&= 1 - \frac{\pi^2+4}{4\pi}\cos(x) - 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{4j^2-1}\cos(2jx) \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j(-1)^j - 2j^2 + (-1)^j - 2j - 1}{2\pi j^2 (j+1)^2} \cos((2j+1)x) \\
&= 1 - \frac{\pi^2+4}{4\pi}\cos(x) - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16k^2-1}\cos(4kx) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4(2k+1)^2-1}\cos((2k+1)x) \\
&- \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\cos((4k+1)x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\cos((4k+3)x).
\end{aligned}
$$

b) Finden Sie nun die Reihendarstellung der Lösung $u(r,\vartheta)$ der Laplacegleichung auf der Einheitsscheibe, welche auf dem Rand gleich $|\vartheta\cos(\vartheta)|$ ist.

Lösung.
Das Dirichlet-Problem in Polarkoordinaten lautet

$$
\begin{cases}
u_{rr} + u_{\vartheta\vartheta}\frac{1}{r^2} + u_r\frac{1}{r} = 0, \\
u(1,\vartheta) = |\vartheta\cos(\vartheta)|,
\end{cases}
$$

und hat die allgemeine Lösung

$$
u(r,\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(A_n\cos(n\vartheta) + B_n\sin(n\vartheta)\right)
$$

wobei die Koeffizienten jenen aus **4a)** entsprechen. **(15 P)**

5. Gegeben sei eine unendliche Saite, welche zur Zeit $t=0$ horizontal um

$$
u(x,0) = \ln\left(\frac{2+e^x}{1+e^{-x}}\right)
$$

ausgelenkt werde. Weiter wird angenommen, dass die Anfangsgeschwindigkeit Null sei und dass sich die Wellen mit der Geschwindigkeit $c=1$ entlang der Saite ausbreiten.

a) Formulieren Sie das Problem mathematisch.

Lösung.

Die Situation wird durch die eindimensionale Wellengleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$ beschrieben, unter den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = \ln\left(\frac{2+e^x}{1+e^{-x}}\right) \quad \text{und} \quad u_t(x,0) = 0.$$

b) Finden Sie die Lösung $u(x,t)$ des Problems.

Lösung.
Die Formel von D'Alembert ergibt für die Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{2+e^{x+t}}{1+e^{-x-t}}\right) + \ln\left(\frac{2+e^{x-t}}{1+e^{-x+t}}\right)\right).$$

c) Berechenen Sie nun $\lim\limits_{t\to\infty} u(2,t)$.

Lösung.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} u(2,t) &= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left(\ln\left(\frac{2+e^{2+t}}{1+e^{-2-t}}\right) + \ln\left(\frac{2+e^{2-t}}{1+e^{-2+t}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\ln\left(\left(\frac{2+e^{2+t}}{1+e^{-2-t}}\right)\cdot\left(\frac{2+e^{2-t}}{1+e^{-2+t}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\lim_{t\to\infty}\left(\frac{4+2e^{2-t}+2e^{2+t}+e^4}{1+e^{-2+t}+e^{-2-t}+e^{-4}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\lim_{t\to\infty}\left(\frac{4e^{-t}+2e^{2-2t}+2e^2+e^{4-t}}{e^{-t}+e^{-2}+e^{-2-2t}+e^{-4-t}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(2e^4\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln(2)+2.
\end{aligned}$$

(6 P)

6. Finden Sie für $c > 0$ die Lösung $u(x,t)$ von

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & 0 \le x \le \pi \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x), & \end{cases}$$

wobei

$$f(x) = \begin{cases} \pi^2, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 4x(\pi - x), & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Lösung.
Wir machen den Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ und erhalten mit

$$u_t = X(x)\dot{T}(t) \quad \text{und} \quad u_{xx} = X''(x)T(t)$$

durch Einsetzen in die PDE

$$X(x)\dot{T}(t) = c^2 X''(x)T(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dot{T}(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k.$$

Die Randbedingungen $u_x(0,t) = 0$ und $u_x(\pi, t) = 0$ übersetzen sich wegen $T(t) \not\equiv 0$ zu

$$X'(0) = 0 \quad \text{und} \quad X'(\pi) = 0.$$

Wir müssen also zunächst die ODE

$$\begin{cases} X''(x) = kX(x), \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

lösen. Bisher ist k eine beliebige Konstante. Um diese zu fixieren, betrachten wir die folgenden Fälle:

$k > 0$: In diesem Fall ist die allgemeine Lösung $X(x) = Ae^{\sqrt{k}x} + Be^{-\sqrt{k}x}$. Einsetzen der Randbedingungen liefert, dass nur die triviale Lösung möglich ist. Somit ist dieser Fall uninteressant.

$k \leq 0$: In diesem Fall ist die allgemeine Lösung in der folgenden Form darstellbar: $X(x) = A\cos(\sqrt{-k}x) + B\sin(\sqrt{-k}x)$. Setzen wir $p := \sqrt{-k}$ so liefert die erste Randbedingung

$$X(x) = A\cos(px),$$

und die zweite

$$p_n = n, \quad n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad X_n(x) = A_n \cos(nx).$$

(NB: oder $A_n = 1$ setzen, wie in Vorlesung.)

Die zweite ODE

$$\dot{T}_n(t) = -c^2 n^2 T(t)$$

hat die Lösungen

$$T_n(t) = B_n e^{-c^2 n^2 t}.$$

Insgesamt ist also jede (gleichmässig konvergente) Reihe

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(nx) e^{-c^2 n^2 t}$$

eine Lösung des Randwertproblems. Die Anfangsbedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(nx) = f(x) = \begin{cases} \pi^2, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 4x(\pi - x), & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

besagt, dass die Koeffizienten C_n jenen der Fourierreihe der 2π-periodischen geraden Fortsetzung von $f(x)$ entsprechen. Also

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \pi^2\,dx + \frac{4}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\pi - x^2\,dx \\
&= \pi x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\pi - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{3} \\
&= \frac{5\pi^2}{6}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
C_n &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx \\
&= 2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\,dx + \frac{8}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x\pi - x^2)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{2\pi}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{8}{\pi}\left(\frac{\pi x - x^2}{n}\sin(nx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{n}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - 2x)\sin(nx)\,dx\right) \\
&= \frac{2\pi}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2\pi}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{8}{n\pi}\left(-\frac{\pi - 2x}{n}\cos(nx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{2}{n}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(nx)\,dx\right) \\
&= -\frac{8}{n^2}\cos(n\pi) + \frac{16}{n^3\pi}\sin(nx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= -\frac{8}{n^2}(-1)^n - \frac{16}{n^3\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \begin{cases} -\frac{8}{n^2}, & n = 2j \\ \frac{8}{n^2} - \frac{16}{n^3\pi}(-1)^j, & n = 2j+1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Somit ist die gesuchte Lösung

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \frac{5\pi^2}{6} &- 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\cos(2jx)e^{-4j^2c^2t} \\
&+ \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{8}{(2j+1)^2} - \frac{16}{(2j+1)^3\pi}(-1)^j\right)\cos((2j+1)x)e^{-(2j+1)^2c^2t}.
\end{aligned}
$$

(15 P)