D–MATL, D–MAVT

Musterlösung zur Analysis III

1. **a)** $2\pi f(y)$.

b) (1): parabolisch (2): elliptisch (3): hyperbolisch

2. Wir schreiben:

$$F(p) := \mathcal{L}(f)[p].$$

Dann,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f'')[p] &= p^2F(p) - pf(0) - f'(0) = p^2F(p), & (1)\\ \mathcal{L}(f')[p] &= pF(p) - f(0) = pF(p), & (2)\\ \mathcal{L}(t^3e^{-2t})[p] &= \frac{3!}{(p+2)^4}. & (3) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$F(p)(p^2+4p+4) = F(p)(p+2)^2 = \frac{3!}{(p+2)^4},$$

i.e.

$$F(p) = \frac{3!}{(p+2)^6}.$$

Mit der Inverse Laplace:

$$f(t) = \frac{3!}{5!}e^{-2t}t^5 = \frac{1}{20}e^{-2t}t^5.$$

3. Die angegebene Funktion f ist ungerade und 2π-periodisch. Daraus folgern wir, dass die Fourierreihe von f lautet

$$S(f)(x) = \sum_{n\geq 1} b_n(f)\sin(nx),$$

da a_0 und alle $a_n = 0$ sind. Darüber hinaus,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)f(x)dx.$$

Es folgt, dass

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)dx$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)dx &= -\frac{1}{n}\left[x\cos(nx)\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\cos(nx)\\ &= -\frac{\pi}{2n}\cos(n\pi/2) + \frac{1}{n^2}\sin(n\pi/2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)dx &= -\frac{1}{n}\left[(\pi - x)\cos(nx)\right]_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nx)\\ &= \frac{\pi}{2n}\cos(n\pi/2) + \frac{1}{n^2}\sin(n\pi/2).\end{aligned}$$

Daraus folgern wir, dass

$$S(f)(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{4}{\pi n^2}\sin(n\pi/2)\sin(nx).$$

Da $\sin(2k\pi/2) = 0$, $\sin((2k+1)\pi/2) = (-1)^k$, erhalten wir schlussendlich

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)^2}(-1)^k\sin((2k+1)x),$$

da f stetig und stückweise $\mathcal{C}^1$ ist .

a) Da $\frac{d^2u_p}{dx^2}(x) = 0$, ist $u_p(x) = ax + b$. Mit den RB folgern wir, dass $a = -1$ und $b = \pi$, i.e.

$$u_p(x) = \pi - x.$$

b)

$$[1]\left\{\begin{array}{lll} v_t = v_{xx} & 0 < x < \pi,\ t > 0; & (\textbf{PDG})\\ v(0,t) = 0, \quad v(\pi,t) = 0 & t \geq 0; & (\textbf{RB})\\ v(x,0) = \left\{\begin{array}{cc} x, & 0 \leq x \leq \pi/2\\ \pi - x, & \pi/2 \leq x \leq \pi\end{array}\right. & & (\textbf{AB})\end{array}\right.$$

c) Die Lösung des obigen homogenen Problems lautet

$$v(x,t) = \sum_{n\geq 1} b_n\sin(nx)e^{-n^2t}.$$

Die b_n Koeffizienten bestimmt man mit der Anfangsbedingung:

$$\sum_{n\geq 1} b_n\sin(nx) = v(x,0)$$

$v(x,0)$ kann ungerade und 2π-periodisch fortgesetzt werden, und gleicht dann die Funktion f der Aufgabe 3. Die b_n's sind die Fourierkoeffizienten der Funktion f, und

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2}(-1)^k \sin((2k+1)x)e^{-(2k+1)^2 t}.$$

Die Lösung $u(x,t)$ lautet schlussendlich

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2}(-1)^k \sin((2k+1)x)e^{-(2k+1)^2 t} + \pi - x.$$

Wir suchen die Lösung $u(x,y)$ von

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi; & \textbf{(PDG)} \\ u_x(0,y) = 0 = u_x(\pi,y), & 0 < y < \pi; & \textbf{(RB1)} \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi; & \textbf{(RB2)} \\ u(x,\pi) = \cos(x) + 3\cos(20x), & 0 \le x \le \pi. & \textbf{(RB3)} \end{cases} \tag{4}$$

d) Mit dem gegebenen Ansatz erhalten wir, dass

$$X''(x)Y(y) + X(x)\ddot{Y}(y) = 0$$

Daraus folgern wir, dass

$$\frac{X''}{X} = -\frac{\ddot{Y}}{Y} = -\lambda \in \mathbb{R}.$$

Die zwei ODG sind dann

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{5}$$
$$\ddot{Y} - \lambda Y = 0. \tag{6}$$

e) Es gibt drei Möglichkeiten für λ:

- $\lambda > 0$: Da wir reelle Lösungen suchen, ist

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

  Mit **(RB1)** erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda}B\cos(0) &= 0, \\ -\sqrt{\lambda}A\sin(\sqrt{\lambda}\pi) + \sqrt{\lambda}B\cos(\sqrt{\lambda}\pi) &= 0 \end{aligned}$$

  Die erste Gleichung liefert $B = 0$, und die zweite $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}$.
  Deswegen erhalten wir, dass

$$X_n(x) = A_n \cos(nx).$$

- $\lambda = 0$: $X(x) = Cx + D$. **(RB1)** liefert $C = 0$, und es verbleibt die Lösung

$$X_0(x) = D.$$

- $\lambda < 0$:
$$X(x) = Ee^{\sqrt{-\lambda}x} + Fe^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$
(RB1) liefert
$$\begin{aligned} (E-F)\sqrt{-\lambda} &= 0 \\ \sqrt{-\lambda}Ee^{\sqrt{-\lambda}\pi} - \sqrt{-\lambda}Fe^{-\sqrt{-\lambda}\pi} &= 0. \end{aligned}$$
Wir folgern, dass $E = F$ und dann, dass $E\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$, i.e. $E = 0$. Der Fall $\lambda < 0$ liefert also nur $X = 0$.

f) Wir müssen nun $\lambda = 0$ und $\lambda = n^2$ untersuchen, da $X = 0$ für $\lambda < 0$.

- $\lambda = n^2$: Dann
$$Y_n(y) = E_n e^{-ny} + F_n e^{ny}.$$
(RB2) liefert $E_n + F_n = 0$, i.e.
$$Y_n = D_n \sinh(ny).$$
- $\lambda = 0$. Dann $Y(y) = Ay + B$, und **(RB2)** liefert $B = 0$.
$$Y_0(y) = Ay.$$

g) Die Lösungen der obigen Form sind Abzählbar und lauten
$$\begin{aligned} u_n &= a_n \cos(nx)\sinh(ny), \quad n \in \mathbb{N}, && (7) \\ u_0 &= a_0 y. && (8) \end{aligned}$$
Mit dem Superpositionsprinzip (nur falls richtig angewendet) erhalten wir
$$u(x,y) = a_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\sinh(ny). \tag{9}$$
wobei $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

h) **(RB3)** gibt uns direkt
$$a_0 = 0, \qquad a_1 = \frac{1}{\sinh(\pi)}, \qquad a_{20} = \frac{3}{\sinh(20\pi)}, \qquad a_n = 0, \; n \neq 0, 1, 20. \tag{10}$$
Deswegen
$$u(x,y) = \frac{1}{\sinh(\pi)}\cos(x)\sinh(y) + \frac{3}{\sinh(20\pi)}\cos(20x)\sinh(20y).$$

i) Mit der D'Alembert Formel erhalten wir, dass

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} g(y)dy\right).$$

Für $x = 0, t = 1/2$, folgern wir, dass

$$u(0,1/2) = \frac{1}{2}\left(f(1/2) + f(-1/2) + \int_{-1/2}^{1/2} g(y)dy\right) = \frac{3}{2}.$$

j) Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{1}{2}\left(0 + 0 + \int_{-1}^{1} g(y)dy\right) = 1.$$