Zweite Prüfung

Allgemeine Hinweise:

- Lese zuerst alle Aufgaben durch. Verweile nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Schwierigkeiten bereitet.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Notiere alle Zwischenresultate und Rechenschritte und begründe die Resultate.
- Bitte verwende für jede Aufgabe ein neues Blatt und nummeriere jedes Blatt.
- Bitte schreibe auf **alle** abzugebenden Blätter Deinen Namen, fülle den Kopf des Deckblattes aus und notiere dort Deine Leginummer.
- Vergiss nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Erlaubte Hilfsmittel:

- 20 A4-Seiten (10 A4-Blätter) selbstverfasst von Hand oder getippt;
- **Keine** sonstige Literatur;
- **Kein** Taschenrechner;
- **Kein** Mobiltelephon oder MP3.

Nota Bene:

- Falls nichts anderes bemerkt ist, sind alle Funtionen reell-wertig und auf ganz $\mathbb{R}$, definiert. Zusätzlich darfst du annehmen, dass die Funktionen genügend oft differenzierbar und integriebar sind um die Aufgabe zu lösen.

Viel Erfolg!

Bitte wenden!

1. **a)** Seien $(k, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ zwei Konstanten. Nimm an, dass der lineare Operator

$$\frac{k^2}{2}\left(\partial_{xx} + \partial_{yy}\right) \;+\; \left(2\alpha^2 - k^2\right)\partial_{xy} \;+\; \alpha\,\partial_x \;+\; k\,\partial_y \;+\; k$$

$$\begin{cases} \text{elliptisch ist,} & \text{falls} \quad |k| > 1 \\ \text{hyperbolisch,} & \text{falls} \quad |k| < 1 \\ \text{parabolisch,} & \text{falls} \quad k = 1\,. \end{cases}$$

Bestimme α. Begründe deine Antwort.

[*5 Punkte*]

b) Finde die Ableitung (im Sinne der Distributionen) der Funktion

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} x + 2 \quad , & x < 1 \\ 2 \quad , & 1 \leq x \leq 2 \\ x - 1 \quad , & x > 2\,. \end{cases}$$

[*5 Punkte*]

2. Mithilfe der Methode der Charakteristiken, bestimme die Funktion u auf $\{x \geq 1\} \times \{y \geq 1\}$ welche folgende Gleichung erfüllt:

$$x^3 u_x \;=\; y^3 u_y \qquad \text{mit der Cauchy Bedingung} \qquad \lim_{y\to\infty} u(x,y) \;=\; F\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Die Lösung $u(x, y)$ des Problems wird von die Funktion F abhängen.

[*10 Punkte*]

3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene beschränkte Teilmenge mit glattem Rand und sei g eine glatte Funktion auf U einschliesslich des Randes. Beweise, dass die Lösung der Laplace Gleichung auf U mit Randbedingung g eindeutig ist.

[*10 Punkte*]

4. Löse unter Anwendung der Separation der Variablen

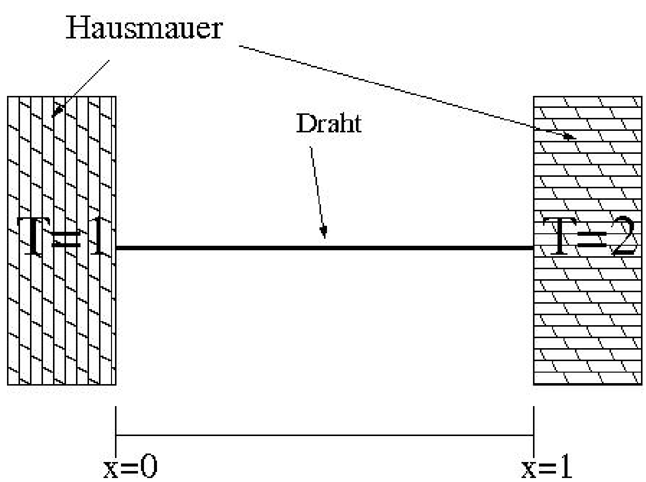
$$\left.\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} \;=\; u & \\ u(0,t) \;=\; 0 \quad , & u(\pi, t) \;=\; 0 \\ u(x,0) \;=\; f(x) \quad , & u_t(x,0) \;=\; g(x) \end{cases}\right\} \quad \text{wobei} \quad (x,t) \in [0,\pi]\times[0,\infty).$$

Die Lösung $u(x, t)$ wird von den Funktionen f und g abhängen.

[*10 Punkte*]

Siehe nächstes Blatt!

5. Ein Draht der Länge 1 sei zwischen zwei Hausmauern gespannt (siehe Skizze). Das eine Haus werde so beheizt, dass in der Hausmauer konstant Temperatur 2 herrsche. Die Temperatur der zweiten Hausmauer sei dagegen konstant 1. Man nehme an, dass Wärmeaustausch zwischen Draht und Umgebung nur an den Enden des Drahtes stattfindet. Bezeichne $u(x,t)$ die Temperatur des Drahtes im Punkt $x \in [0,1]$ und zur Zeit $t \geq 0$. Zur Zeit $t = 0$ sei die Temperaturverteilung im Draht gegeben durch $f(x)$. Im folgenden seinen alle relevanten physikalischen Konstanten auf 1 skaliert.



a) Bestimme das Problem (Gleichung, Rand-/Anfangsbedingungen) welches $u(x,t)$ löst.

b) Löse das Problem mit den gegebenen Daten.

c) Was passiert mit der Lösung für grosse Zeiten ? Rechtfertige dies physikalisch.

[*10 Punkte*]

[***Gesamtpunktzahl: 50 Punkte***]