D-ITET | Analysis III | Herbst 2008
Prof. A. Iozzi

Basisprüfung

Allgemeine Hinweise:

- Lese zuerst alle Aufgaben durch. Verweile nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Schwierigkeiten bereitet.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Notiere alle Zwischenresultate und Rechenschritte und begründe die Resultate.
- Bitte verwende für jede Aufgabe ein neues Blatt und nummeriere jedes Blatt.
- Bitte schreibe auf **alle** abzugebenden Blätter Deinen Namen, fülle den Kopf des Deckblattes aus und notiere dort Deine Leginummer.
- Vergiss nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Erlaubte Hilfsmittel:

- 20 A4-Seiten (10 A4-Blätter) selbstverfasst von Hand oder getippt;
- **Keine** sonstige Literatur;
- **Kein** Taschenrechner;
- **Kein** Mobiltelephon oder MP3.

Nota Bene:

- Falls nichts anderes bemerkt ist, sind alle Funtionen reell-wertig und auf ganz $\mathbb{R}$, definiert. Zusätzlich darfst du annehmen, dass die Funktionen genügend oft differenzierbar und integriebar sind um die Aufgabe zu lösen.

Viel Erfolg!

Bitte wenden!

1. **a)** Sei $k \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Klassifiziere den Differentialoperator

$$\frac{k^2}{2}\big(\partial_{xx} + \partial_{yy}\big) \;+\; \big(2 - k^2\big)\,\partial_{xy} \;+\; (1+k)\big(\partial_x + 2\,\partial_y\big) \;+\; k\,.$$

[*5 Punkte*]

b) Sei H die Heaviside Distribution und $v(x,t,y)$ die Lösung von

$$\begin{cases} v_t \,-\, v_{xx} \;=\; 0 & , \qquad (x,t,y) \,\in\, \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R} \\ v(x,0,y) \;=\; \delta(x-y) & , \qquad (x,y) \,\in\, \mathbb{R}^2\,. \end{cases}$$

Zeige, dass

$$G(x,t,y,s) \;:=\; v(x,t-s,y)\,H(t-s)$$

die Green'sche Funktion vom Operator $\partial_t - \partial_{xx}$ ist. D.h.

$$G_t \,-\, G_{xx} \;=\; \delta(x-y,t-s)\,, \qquad (x,t,y,s) \,\in\, \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\,.$$

Zur Erinnerung : Für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ gibt es

$$H[\phi] \;:=\; \int_{\mathbb{R}} h(z)\phi(z)\,dz\,, \qquad \text{wobei} \qquad h(z) \;:=\; \begin{cases} 0 & , \quad z<0 \\ 1 & , \quad z \geq 0\,. \end{cases}$$

[*5 Punkte*]

2. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Betrachte das Cauchy Problem

$$\begin{cases} 2\,x\,u_y(x,y) \,-\, u_x(x,y) \;=\; 0 & , \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ u\big(x\,,(p-1)\,x^2\big) \;=\; g\big(x^2\big) & , \qquad x\in\mathbb{R}\,, \end{cases}$$

wobei $p \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

a) Bestimme die Lösung $u(x,y)$ aus den gegebenen Daten mithilfe der Methode der Charakteristiken.

b) Zeichne die projezierten Charakteristiken in der (x,y)-Ebene für den Fall $p=1$.

c) Erkläre sorgfältig was im Fall $p=0$ passiert.

[*10 Punkte*]

Siehe nächstes Blatt!

3. Betrachte das Problem

$$u_{tt} - \frac{1}{4} u_{xx} = 0 \,, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^2 \,,$$

mit den Bedingungen

$$u(0,x) = 2f(x)\,, \qquad u_t(0,x) = 0\,, \qquad u_t\left(y\,, \frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2} h'(y)\,, \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}\,.$$

Die Funktionen f und h sind glatt und besitzen die Eigenschaften

$$f(0) = h(0) = h'(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f'(0) = 1\,.$$

Drücke die Lösung $u(t,x)$ nur in Abhängigkeit von h aus.

[*10 Punkte*]

4. Löse mithilfe von Separation der Variablen

$$\left\{ \begin{array}{rclcrcl} \Delta\, u(x,y) & = & u(x,y) & & & & \\ u(x,0) & = & 0 & , & u(x,\pi) & = & 0 \\ u(0,y) & = & \sin y & , & u(\pi,y) & = & 0 \end{array} \right\} \quad \text{wobei} \quad (x,y) \in [0,\pi]\times[0,\pi].$$

[*10 Punkte*]

5. Betrachte einen Stab der in $0 \leq x \leq 1$ liegt. Der Stab besteht aus radioaktivem Material, welches die Konstante Wärme 1 (in geeigneten Einheiten) abgibt. Zusätzlich ist der Stab an beiden Enden isoliert. Am Anfang ist die Temperaturverteilung $f(x)$. Mit $u(x,t)$ bezeichnen wir die Temperatur an der Stelle $x \in [0,1]$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Nimm an, dass u die Wärmeleitungsgleichung mit spezifischer Wärme 1 erfüllt.

a) Bestimme das Problem (Gleichung, Rand-/Anfangsbedingung) welches $u(x,t)$ löst.

b) Löse das Problem mit den gegebenen Daten.

c) Was passiert mir der Lösung für grosse Zeiten? Rechtfertige dies physikalisch.

[*10 Punkte*]

[*Gesamtpunktzahl: 50 Punkte*]