ETH Zürich
Prof. Dr. A. Iozzi

Winter 2015

Prüfung Analysis III
D–MAVT, D–MATL

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi Nr.:	

Bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total		

Vollständigkeit	

ETH Zürich | Winter 2015

Prof. Dr. A. Iozzi

Wichtig:

- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es im Gepäck.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Schreiben Sie auf alle Blätter Ihren Namen und füllen Sie das Deckblatt aus.
- Es wird erwartet, dass Sie Ihre Anworten begründen. Notieren Sie alle Zwischenresultate und Lösungswege.
- Die allgemeinen Lösungen für PDE's, welche in der **Vorlesung** hergeleitet wurden, dürfen verwendet werden. Dies gilt **nicht** für Lösungen, die in den Übungen hergeleitet wurden!
- Geben Sie pro Aufgabe nur **eine** Lösung ab.
- Schreiben Sie **nicht** mit **Bleistift**, **roter** oder **grüner Farbe** und verwenden Sie **keinen Tipp-Ex**.

Zugelassene Hilfsmittel:

- Notizen auf 10 beidseitig beschriebenen A4-Blättern.
- ein Wörterbuch.
- **keine** Formelsammlungen.
- **kein** Handy.

Laplacetransformation:

	$f(t)$	$\mathscr{L}(f)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	t^2	$\frac{2!}{s^3}$
4	t^n, $n \in \mathbb{N}_0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

	$f(t)$	$\mathscr{L}(f)$
5	t^a, $a > 0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
7	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
8	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

	$f(t)$	$\mathscr{L}(f)$
9	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
10	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
11	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
12	$\delta(t-a)$	e^{-as}

(Γ=Gammafunktion, u=Heavisidefunktion, δ=Deltafunktion)

1. Finden Sie mittels Laplacetransformation die Lösung $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Integralgleichung

$$f(t) = \cos(t) + \int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

(6 P)

2. Bestimmen Sie für $t > 0$ die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = e^{2t}u(t-2) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

wobei u die Heaviside Funktion ist. **(10 P)**

3. Lösen Sie für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ das folgende Anfangswertproblem mittels Fouriertransformation bezüglich x

$$\begin{cases} t^2 u_x - u_t = 0 \\ u(x,0) = 3\cos(x), \end{cases}$$

und zwar ohne die Fouriertransformierte von $3\cos(x)$ explizit zu berechnen. **(6 P)**

4. a) Bestimmen Sie die Fourierreihe der Funktion

$$f(x) = |x\cos(x)|, \quad -\pi < x < \pi.$$

b) Finden Sie nun die Reihendarstellung der Lösung $u(r, \vartheta)$ der Laplacegleichung auf der Einheitsscheibe, welche auf dem Rand gleich $|\vartheta\cos(\vartheta)|$ ist. **(15 P)**

5. Gegeben sei eine unendliche Saite, welche zur Zeit $t = 0$ horizontal um

$$u(x,0) = \ln\left(\frac{2 + e^x}{1 + e^{-x}}\right)$$

ausgelenkt werde. Weiter wird angenommen, dass die Anfangsgeschwindigkeit Null sei und dass sich die Wellen mit der Geschwindigkeit $c = 1$ entlang der Saite ausbreiten.

a) Formulieren Sie das Problem mathematisch.

b) Finden Sie die Lösung $u(x,t)$ des Problems.

c) Berechnen Sie nun $\lim\limits_{t\to\infty} u(2,t)$.

(6 P)

6. Finden Sie für $c > 0$ die Lösung $u(x,t)$ von

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & \end{cases}$$

wobei

$$f(x) = \begin{cases} \pi^2, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 4x(\pi - x), & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

(15 P)

VIEL ERFOLG!