ETH Zürich
Prof. Dr. F. Da Lio

Summer 2018

Exam Analysis III
D–MAVT, D–MATL

Please fill!

Surname:	
First Name:	
Student Card Nr.:	

Please do not fill!

Exercise	Value	Points	Control
1	7		
2	7		
3	11		
4	7		
5	12		
Total			

Please do not fill!

Completeness	

Important: Before the exam starts, please

- Turn off your mobile phone and place it inside your Briefcase/Backpack.
- Put your bags on the floor. No bags on the desk!
- Place your Student Card (Legi) on the desk.
- Fill in the front page of the exam with your generalities.

During the exam, please

- Start every exercise on a new piece of paper.
- Put your name on the top right corner of every page.
- You are expected to motivate your answers. Please write down calculations and intermediate results.
- Provide at most **one** solution to each exercise.
- **Do not** write with **pencils**. Please avoid using **red** or **green** ink pens.

Allowed aids:

- 20 pages (=10 sheets) DIN A4 handwritten or typed personal summary.
- An English dictionary.

Not allowed:

No further aids are allowed. Especially neither communication devices nor pocket calculators.

Good Luck!

Laplace Transforms:

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	t^2	$\frac{2!}{s^3}$
4	$t^n,\ n \in \mathbb{N}_0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
5	$t^a,\ a > 0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
7	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
8	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
9	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
10	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
11	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
12	$\delta(t-a)$	e^{-as}

(Γ=Gamma function, u=Heaviside function, δ=Delta function)

1. Laplace Trasform (*7 Points*)
Solve the following differential equation using the Laplace transform:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = g(t) \quad & t > 0 \\ y(0) = 0 & \\ y'(0) = 0. & \end{cases}$$

The forcing term $g(t)$ is defined as

$$g(t) = u(t-2) + u(t+2)$$

($u(t)$ denotes the so-called Heaviside function).

2. Wave Equation (*7 Points*)
Let $u(x,t)$ be the solution of the following initial value problem

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 3, & |x| \le 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a) Find $u(1,1)$ by using D'Alambert's formula.

b) Find $\lim\limits_{t\to\infty} u(1,t)$.

Please turn!

3. Heat Equation (*11 Points*)

Find for $x \in \mathbb{R}$ and $t \geq 0$ the solution $u(x,t)$ of the heat equation

$$u_t - 4u_{xx} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

where

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \cosh(x), & \text{if } |x| < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

in Fourier-Integral form.

(You don't need to compute the resulting Fourier integral. Recall that $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$).

4. Fourier Series (*7 Points*)

Consider the function

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

and the even periodic extension f_e with period 4 of the function f.

a) Draw the graph of f_e.

b) Determine the Fourier series of f_e.

5. Heat Equation with Inhomogeneous Boundary Conditions (*12 Points*)

We consider the following boundary value problem:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0, \\ u(0,t) = 2, & t \geq 0 \\ u(\pi,t) = 3, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \tag{1}$$

where

$$f(x) = x(\pi - x) + \frac{x}{\pi} + 2.$$

The boundary conditions are not homogeneous, therefore one cannot directly apply the method of separation of variables.

You should argue as follows:

i) Construct a function $w(x)$ with $w(0) = 2$, $w(\pi) = 3$ and $w'' = 0$.

ii) Let u be a solution of the above boundary value problem (1). State the boundary value problem for the function $v(x,t) := u(x,t) - w(x)$.

iii) Solve the boundary value problem for v by using the method of separation of variables. Please show the steps of the method of separation of variables.

iv) Find the solution u of the original boundary value problem (1) .

Wichtig: Bevor Sie mit der Prüfung beginnen, bitte

- schalten sie ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es in der Tasche,
- belassen Sie keine Taschen auf dem Tisch,
- legen Sie Ihre Legi auf den Tisch,
- füllen Sie das Deckblatt mir Ihrem Namen und Ihrer Leginummer aus.

Während der Prüfung, bitte

- starten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt,
- schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt,
- motivieren Sie Ihre Antwort und schreiben Sie Rechnungen und Zwischenschritte auf,
- geben Sie nur eine Löseung pro Aufgabe ab,
- schreiben Sie weder mit Bleistift noch mit einem grünen oder roten Stift.

Erlaubte Hilfsmittel:

- 20 Seiten (=10 Blätter) DIN A4 von hand geschriebene oder getippte persönliche Zusammenfassung.
- English Wörterbuch

Nicht erlaubt:

Keine weiteren Hilfsmittel sind erlaupt, insbesondere keine Kommunikationsmittel und Taschenrechner.

1. **Laplace Transformation** (*7 Punkte*)
Löse die folgende Differentialgleichung mittels Laplace Transformation:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = g(t) & t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

wobei $g(t)$ folgendermassen gegeben ist

$$g(t) = u(t-2) + u(t+2)$$

($u(t)$ bezeichnet die Heaviside Funktion).

2. **Wellengleichung** (*7 Punkte*)
Sei $u(x,t)$ die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 3, & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a) Finde $u(1,1)$ mittels der Formel von D'Alambert.

b) Finde $\lim\limits_{t\to\infty} u(1,t)$.

3. **Wärmeleitungsgleichung** (*11 Punkte*) Finde für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ die Lösung $u(x,t)$ der folgenden Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - 4u_{xx} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

mit

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \cosh(x), & \text{falls } |x| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

in Fourier-Integral Form.

(Das resultierende Fourier Integral muss nicht berechnet werden. Zur Erinnerung: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$).

4. Fourier Reihe (*7 Punkte*)
Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

und die gerade periodische Erweiterung f_e mit Periode 4 der Funktion f.

a) Zeichnen Sie den Graph von f_e .

b) Bestimmen sie die Fourier Reihe von f_e .

5. Wärmeleitungsgleichung mit inhomogenen Randbedingungen (*12 Punkte*)
Wir betrachten folgendes Randwertproblem:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & 0 \le x \le \pi, t \ge 0, \\ u(0,t) = 2, & t \ge 0 \\ u(\pi,t) = 3, & t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le \pi, \end{cases} \tag{2}$$

mit

$$f(x) = x(\pi - x) + \frac{x}{\pi} + 2.$$

Die Randbedingungen sind nicht homogen. Deshalb kann die Methode der Separation der Variablen nicht direkt verwendet werden.

Sie sollten folgendermassen argumentieren:

i) Konstruieren Sie eine Funktion $w(x)$ mit $w(0) = 2$, $w(\pi) = 3$ und $w'' = 0$.

ii) Sei u die Lösung des obigen Randwertproblems (2). Formulieren Sie das Randwertproblem für $v(x,t) := u(x,t) - w(x)$.

iii) Lösen Sie das Randwertproblem für v mittels Separation der Variablen. Bitte zeigen Sie die Schritte der Methode der Separation der Variablen.

iv) Finden Sie die Lösung u des ursprünglichen Randwertproblems (2) .