Lösung

1. **a)** Sei Ω beschränkt und u und v Lösungen zu demselben Randwertproblem:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = f(x) & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann sind $u - v$ und $v - u$ Lösungen des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & x \in \Omega \\ w(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Aus dem Maximumsprinzip folgt dann, dass

$$u - v \leq \max_{\bar{\Omega}}(u-v) = \max_{\partial\Omega}(u-v) = \max_{\partial\Omega}(f-f) = 0 \tag{1}$$

und

$$v - u \leq \max_{\bar{\Omega}}(v-u) = \max_{\partial\Omega}(v-u) = \max_{\partial\Omega}(f-f) = 0. \tag{2}$$

Aus diesen Ungleichungen folgt, dass $u - v = 0$ und somit $v = u$.

b) Unter hinreichenden Wachstumsbeschränkungen für f löst u das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_t(x,t) & x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

c) Sei $x_1 := x$ und $x_2 := y$. Dann ist der vorliegende Operator L in diesem Falle von der From

$$L := A^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b^j \frac{\partial}{\partial x_j} + c, \tag{3}$$

wobei $c = 0$, $b = (x_1, 1)^T$ und $A^{11} = 1 - x_1^2$, $A^{22} = 1 - x_2^2$, $A^{12} = A^{21} = x_1 x_2$. Das charakteristische Polynom von A ist also:

$$p_A(t) = (1 - x_1^2 - t)(1 - x_2^2 - t) - x_1^2 x_2^2. \tag{4}$$

Nach dem Satz von Vieta

$$p_A(t) = (t-1)(t - (1 - x_1^2 - x_2^2)). \tag{5}$$

Bitte wenden!

Die Eigenwerte von A sind somit $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 1 - x_1^2 - x_2^2$. Daraus folgt sofort, dass L im Bereich $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ elliptisch und im Bereich $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}$ hyperbolisch ist. Auf $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ ist der Operator parabolisch.

Bemerkung: Korrekterweise sollte man noch überprüfen, dass $\langle v, b\rangle \neq 0$, wobei v den Eigenvektor zum Eigenwert 0 bezeichnet. Dies ist in zwei Punkten des Einheitskreises nicht der Fall, an diesen Punkten ist die Gleichung nicht klassifizierbar.

d) Sei $f(x) = e^{-|x|}$ udn $y = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \delta_y(\sin(x)) f(x)\, dx &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|\pi} \\
&= 1 + \sum_{n>1} 2e^{-|n|\pi} \\
&= 1 + 2\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} \\
&= \frac{\cosh(\pi)}{\sinh(\pi)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

2. Zunächst bestimmen wir u^*, d.h. die Lösung zu dem Randwertproblem:

$$\left\{\begin{array}{r|l}
a^2 u^*_{xx}(x) + b = 0 & x \in \mathbb{R} \\
u^*(0) = 0 & , \\
u^*(L) = 0 & .
\end{array}\right.$$

Die Lösung diese Problems ist eindeutig und daher ein Polynom zweiten Grades mit Nullstellen 0 und L, d.h

$$u^*(x) = -\frac{b}{2a^2}(x-L)x. \tag{7}$$

Sei also $v(x,t) := u(x,t) - u^*(x)$. Dann erfüllt v die Gleichung

$$\left\{\begin{array}{r|l}
v_t = u_t = a^2(v_{xx} + u^*_{xx}) + b = a^2 v_{xx} & x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\
v(0,t) = v(L,t) = 0 & t \geq 0, \\
v(x,0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - u^*(x) & t \geq 0.
\end{array}\right.$$

Dieses Problem ist nun homogen, d.h. wir wählen den Ansatz: $v(x,t) = X(x)T(t)$. Daraus erhält man:

$$T'(t)X(x) = a^2 T(t) X''(x). \tag{8}$$

Daraus folgen zwei Gleichungen:

$$T'(t) = CT(t) \tag{9}$$

Siehe nächstes Blatt!

und

$$a^2 X''(x) = CX(x) \tag{10}$$

für irgendein $C \in \mathbb{R}$. Es gilt nun drei Fälle zu unterscheiden:

- Der Fall $C > 0$: Daraus folgt, dass

  $$X(x) = A_1 \sinh(\frac{\sqrt{C}}{a} x) + A_2 \cosh(\frac{\sqrt{C}}{a} x). \tag{11}$$

  Einsetzen der Randbedingung $X(0) = 0$ ergibt

  $$0 = X(0) = A_1 \sinh(\frac{\sqrt{C}}{a} 0) + A_2 \cosh(\frac{\sqrt{C}}{a} 0) = A_2, \tag{12}$$

  also $A_2 = 0$. Einsetzen der Randbedingung $X(L) = 0$ ergibt entsprechend

  $$0 = X(L) = A_1 \sinh(\frac{\sqrt{C}}{a} L), \tag{13}$$

  Dies ist nur möglich falls $A_1 = 0$. Wir erhalten also als einzige möglich Lösung die triviale Lösung $X(x) = 0$.
- Der Fall $C = 0$, d.h

  $$X''(x) = 0. \tag{14}$$

  Diese Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

  $$X(x) = A_1 x + A_2, \tag{15}$$

  wobei $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$. Aus der Randbedingung $X(0) = 0$ folgt, dass

  $$0 = X(0) = A_2, \tag{16}$$

  also $A_2 = 0$ und somit $X(x) = A_1 x$. Nun impliziert die zweite Randbedingung $X(L) = 0$, dass

  $$0 = X(L) = A_1 L. \tag{17}$$

  Dies ist wiederum nur möglich, wenn $A_1 = 0$. Wir erhalten also nur die triviale Lösung.
- Bleibt also der Fall $C := -\lambda^2 < 0$.

D.h. X_λ ist von der Form:

$$X(x) = A_1 \sin(\frac{\lambda}{a} x) + A_1 \cos(\frac{\lambda}{a} x). \tag{18}$$

Aus der ersten Randbedingung folgt, dass $A_1 = 0$ und die zweite impliziert $X(L) = 0$, d.h.

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi a}{L}. \tag{19}$$

Bitte wenden!

also

$$X_n(x) = A_n \sin(\frac{n\pi}{L}x). \tag{20}$$

Einsetzen von λ_n in die Differentialgleichung für $T(t)$ ergibt ein Lösung:

$$T_n(t) = e^{-(\frac{n\pi a}{L})^2 t}. \tag{21}$$

Aus dem Superpositionsprinzip folgt, dass $u(x,t)$ von der Form

$$v(x,t) = \sum_{n\geq 1} A_n e^{-(\frac{n\pi a}{L})^2 t} \sin(\frac{n\pi}{L}x) \tag{22}$$

ist. Die Koeffizienten A_n erhalten wur durch folgende Überlegung: Die Anfangsbedingung für v ergibt die Gleichung für $x \in [0, L]$:

$$v(x,0) = \sum_{n\geq 1} A_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) = \sin(\frac{\pi x}{L}) - u^*(x). \tag{23}$$

Zunächst setzen wir $u^*(x)$ als ungerade $2L$-periodische Funktion $\widetilde{u^*}(x)$ fort und ermitteln die Fourierkoeffizienten:

$$B_n := \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \widetilde{u^*}(x) \sin(\frac{n\pi}{L}x) dx. \tag{24}$$

Partielle Integration ergibt

$$B_n = \frac{4L^2}{(n\pi)^3}\frac{b}{2a^2}(1 - (-1)^n). \tag{25}$$

Also ist

$$A_n = \frac{4L^2}{(n\pi)^3}\frac{b}{2a^2}((-1)^n - 1), \tag{26}$$

falls $n \neq 1$ und

$$A_1 = 1 - \frac{4L^2}{\pi^3}\frac{b}{a^2}. \tag{27}$$

Und für u ergibt sich

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(x,t) + u^*(x) \\ &= \left(\left(1 - \frac{4L^2}{(\pi)^3}\frac{b}{a^2} \right) e^{-(\frac{\pi a}{L})^2 t} + \frac{4L^2}{(\pi)^3}\frac{b}{a^2} \right) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \\ &\quad + \sum_{n>1} \frac{4L^2}{(n\pi)^3}\frac{b}{2a^2}((-1)^n - 1)\left(e^{-(\frac{n\pi a}{L})^2 t} - 1\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &= \left(\left(1 - \frac{4L^2}{(\pi)^3}\frac{b}{a^2} \right) e^{-(\frac{\pi a}{L})^2 t} \right) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \\ &\quad + \sum_{n>1} \frac{4L^2}{(n\pi)^3}\frac{b}{2a^2}((-1)^n - 1)\left(e^{-(\frac{n\pi a}{L})^2 t}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + u^*(x) \end{aligned} \tag{28}$$

Siehe nächstes Blatt!

Partielle Integration in Aufgabe 2:
Bemerke: Die ungerade Fortsetzung uf(x^2) von x^2 auf $[0, L]$ auf $[-L, L]$ ist $-x^2$ auf $[-L, 0]$, d.h.

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} \mathrm{uf}(x^2)\sin(n\pi x/L)dx &= \int_{-L}^{0}(-x^2)\sin(n\pi x/L)dx + \int_{0}^{L}(x^2\sin(n\pi x/L))dx \\ &= 2\int_0^L x^2\sin(n\pi x/L)dx \\ &= 2x^2\frac{-L}{n\pi}\cos(n\pi x/L)\Big|_0^L - 2\int_{0,L} 2x\frac{-L}{n\pi}\cos(n\pi x/L)dx \\ &= 2\frac{-L^3}{n\pi}(-1)^n + 4\int_0^L \frac{-L^2}{(n\pi)^2}\sin(\frac{n\pi x}{L})dx \\ &= 2\frac{-L^3}{n\pi}(-1)^n + 4\frac{L^3}{(n\pi)^3}\cos(n\pi x/L)\Big|_0^L \\ &= 2\frac{-L^3}{n\pi}(-1)^n + 4\frac{L^3}{(n\pi)^3}((-1)^n - 1).\end{aligned} \tag{29}$$

Offensichtlich ist die ungerade Fortsetzung von x auf $[0, L]$ auf $[-L, L]$ wiederum x. Also

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} x\sin(n\pi x/L)dx &= x\frac{-L}{n\pi}\cos(n\pi x/L)|_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L}\frac{-L}{n\pi}\sin(n\pi x/L)dx \\ &= \frac{-2L^2}{n\pi}(-1)^n\end{aligned} \tag{30}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L}\widetilde{u^*}(x)\sin(n\pi x)dx &= -\frac{b}{2a^2}(2\frac{-L^3}{n\pi}(-1)^n + 4\frac{L^3}{(n\pi)^3}((-1)^n - 1) + \frac{2L^3}{n\pi}(-1)^n) \\ &= -\frac{b}{2a^2}4\frac{L^3}{(n\pi)^3}((-1)^n - 1).\end{aligned} \tag{31}$$

3. **a)** Die Koeffizienten lassen sich als $a = -1$, $b = 2$, $c = -1$ und $d = 1$ bestimmen. D.h

$$v(x, y) = -x + 2xy - y + 1. \tag{32}$$

Bitte wenden!

b) Die Funktion $w = u - v$ erfüllt also das homogene Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & x \in \ [0,1] \times [0,1], \\ w(x,0) = 0 & x \in [0,1], \\ w(0,y) = 0 & y \in [0,1], \\ w(1,y) = 0 & y \in [0,1], \\ w(x,1) = \sin^3(k\pi x) & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Eine Lösung für w lässt sich mit Hilfe des Separationsansatzes $w(x,y) = X(x)Y(y)$ finden:
Es ergeben sich also die beiden Gleichungen

$$X''(x) = CX(x) \tag{33}$$

und

$$Y''(y) = -CY(y), \tag{34}$$

Es lassen sich drei Fälle unterscheiden:

- Der Fall $C > 0$: Hier folgt, dass

$$X(x) = A_1 \sinh(\sqrt{C}x) + A_2 \cosh(\sqrt{C}x). \tag{35}$$

Aus der zweiten Randbedingung folgt, dass $X(0) = 0$ und somit

$$0 = X(0) = A_1 \sinh(\sqrt{C}0) + A_2 \cosh(\sqrt{C}0) = A_2, \tag{36}$$

d.h. $A_2 = 0$. Die dritte Randbedingung impliziert $X(1) = 0$, also

$$0 = X(1) = A_2 \cosh(\sqrt{C}1). \tag{37}$$

Dies ist nur möglich, falls $A_1 = 0$. Daraus folgt dass in diesem Fall $X(x)$ die tirviale Lösung $X(x) = 0$ ist.

- Der Fall $C = 0$: Also

$$X''(x) = 0. \tag{38}$$

Diese Differentialgleichung besitzt die allgemeine Lösung

$$X(x) = A_1 x + A_2. \tag{39}$$

Aus der zweitenm Randbedingung folgt, dass

$$0 = X(0) = A_2, \tag{40}$$

also $X(x) = A_1 x$. Die dritte Randbedingung impliziert

$$0 = X(1) = A_1, \tag{41}$$

udn somit is $X(x)$ die triviale Lösung.

Siehe nächstes Blatt!

- Bleibt also der Fall $C = -\lambda^2 < 0$:

$$X(x) = A_1 \sin(\lambda x) + A_2 \cos(\lambda x) \tag{42}$$

und

$$Y(y) = B_1 \sinh(\lambda y) + B_2 \cosh(\lambda y). \tag{43}$$

Aus der zweiten Randbedinung folgt, dass $A_2 = 0$, aus der dritten, dass $\lambda = \lambda_n = n\pi$, wobei $n \in \mathbb{Z}$ und aus der ersten, dass $B_2 = 0$.

$$w(x, y) = \sum_{n>1} \alpha_n \sinh(n\pi y) \sin(n\pi x) \tag{44}$$

Die Koeffizienten lassen sich mit Hilfe der vierten Randbedingung

$$w(x, 1) = \sin^3(k\pi x) \tag{45}$$

ermitteln. Dazu bemerke man, dass

$$\sin^3(k\pi x) = \frac{1}{4}(3 \sin(k\pi x) - \sin(3k\pi x)). \tag{46}$$

Somit ist $\alpha_n = 0$, falls $n \notin \{k, 3k\}$. Und $\alpha_k = \frac{3}{4}\frac{1}{\sinh(k\pi)}$ sowie $\alpha_{3k} = \frac{-1}{4}\frac{1}{\sinh(3k\pi)}$. Also

$$w(x, y) = \frac{3}{4}\frac{\sinh(k\pi y)}{\sinh(k\pi)} \sin(k\pi x) - \frac{1}{4}\frac{\sinh(3k\pi y)}{\sinh(3k\pi)} \sin(3k\pi x), \tag{47}$$

und somit

$$u(x, y) = -x + 2xy - y + 1 + \frac{3}{4}\frac{\sinh(k\pi y)}{\sinh(k\pi)} \sin(k\pi x) - \frac{1}{4}\frac{\sinh(3k\pi y)}{\sinh(3k\pi)} \sin(3k\pi x). \tag{48}$$

4. **a)** Dieses AWP hat die Form:

$$\left\{ \begin{array}{rcl|l} c^2 u_{xx}(x,t) & = & u_{tt}(x,t) & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) & = & \varphi(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) & = & \psi(x) & x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

D.h. das Problem lässt sich mit Hilfe der d'Alembertformel lösen:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau)d\tau. \tag{49}$$

In unserem Fall ist $\varphi := (\frac{1}{2}x^4 - ax^3 + \frac{1}{2}a^3 x)\chi_{[0,a]}$ und $\psi := \sin(\pi x/a)\chi_{[0,a]}$.

Bitte wenden!

b) Bemerke zunächst, dass die ungerade Fortsetzung von ψ bzw. φ tatsächlich C^2-stetig ist. Einsetzen in die d'Alembert Formel zeigt, dass die Randbedingungen dann automatisch erfüllt sind:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \frac{1}{2}(\varphi(ct)+\varphi(-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} \sin(\frac{\pi\tau}{a})d\tau \\ &= \frac{1}{2c}\frac{-a}{\pi}(cos(\pi\frac{ct}{a}) - \cos(\pi\frac{-ct}{a})) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{50}$$

und

$$\begin{aligned} u(L,t) &= \frac{1}{2}(\varphi(a+ct)+\varphi(a-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{a-ct}^{a+ct} \sin(\frac{\pi\tau}{a})d\tau \\ &= \frac{1}{2c}\frac{-a}{\pi}(\cos(\pi\frac{a+ct}{a}) - \cos(\pi\frac{a-ct}{a})) \\ &= \frac{1}{2c}\frac{-a}{\pi}(\cos(\pi+\frac{ct}{a}) - \cos(\pi+\frac{-ct}{a})) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{51}$$

5. a) Wir wollen zeigen, dass G_Q tatsächlich die Greensche Funktion für den ersten Quadranten ist. Dazu überprüfen wir, dass $(G_Q)_{|\partial Q} = 0$ und $\Delta G_Q(x,y) = \delta_y$. Die erste Eigenschaft ist offensichtlich, da $\Phi(\partial Q) \subset \partial H$ und $\Phi(y) \in H$, falls $y \in Q$. Um die zweite Eigenschaft zu überprüfen kann man folgendermassen vorgehen:
Bemerke zunächst, dass $\Phi : Q \to H$ ein Diffeomorphismus ist. Unter Verwendung eine Koordinatentransformation $z := \Phi(x)$ erhalten wir für eine Testfunktion $u \in C_c^\infty(Q,\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \int_Q \Delta_x u(x) G_Q(x,y)dx &= \int_Q \Delta_x u(x) G_H(\Phi(x),\Phi(y))dx \\ &= \int_H (\Delta_x u)(\Phi^{-1}(z)) G_H(z,\Phi(y)) d(\Phi^{-1}(z)) \\ &= \int_H \Delta_z(u\circ\Phi^{-1})(z) G_H(z,\Phi(y))dz \\ &= u(\Phi^{-1}(\Phi(y))) \\ &= u(y). \end{aligned} \tag{52}$$

Bemerkung: Hierbei verwenden wir, dass

$$\Delta_z(u\circ\Phi^{-1})(z) = \frac{1}{4(x^2+y^2)}(\Delta_x u)(\Phi^{-1}(z)) \tag{53}$$

Siehe nächstes Blatt!

und dass

$$d\Phi^{-1}(z) = \det(D\Phi^{-1}(z))dz_1dz_2 = \frac{1}{4(x_1^2+x_2^2)}dz_1dz_2 \tag{54}$$

Berchung der Ausdrücke in der Bemerkung:
Zunächst stelle man fest, dass

$$D\Phi(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Daraus erhält man die Metrik g für die Halbebene in den neuen Koordinaten:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 4(x_1^2+x_2^2) & 0 \\ 0 & 4(x_1^2+x_2^2) \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Und somit den Laplace Operator

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}}\partial_i\sqrt{\det(g)}g^{ij}\partial_j = \frac{1}{4(x_1^2+x_2^2)}\Delta. \tag{57}$$

Für das Volumenelement berechnet man

$$\sqrt{\det(g)} = 4(x^2+x_2^2) \tag{58}$$

b) Die Lösung für das Randwertproblem kann also durch folgenden Ausdruck beschrieben werden:

$$u(y_1,y_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x_1-x_2}(1-x_1)\left(\log\left(\frac{|x-y|}{|x-y^*|}\frac{|x+y|}{|x+y^*|}\right)\right)dx_1dx_2. \tag{59}$$