D-ITET | Analysis III | Sommer 2009
Prof. A. Iozzi

Zweite Prüfung

1. **a)** Seien $(k, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ zwei Konstanten. Nimm an, dass der lineare Operator

$$\frac{k^2}{2}\left(\partial_{xx} + \partial_{yy}\right) + \left(2\alpha^2 - k^2\right)\partial_{xy} + \alpha\,\partial_x + k\,\partial_y + k$$

$$\begin{cases} \text{elliptisch ist,} & \text{falls} \quad |k| > 1 \\ \text{hyperbolisch,} & \text{falls} \quad |k| < 1 \\ \text{parabolisch,} & \text{falls} \quad k = 1\,. \end{cases}$$

Bestimme α. Begründe deine Antwort.

[*5 Punkte*]

Der Operator ist von der Form ($x_1 = x$, $x_2 = y$)

$$A^{ij}\partial_{x_i x_j} + b^j\partial_{x_j} + c,$$

wobei 1 Punkt

$$(A^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{k^2}{2} & \alpha^2 - \frac{k^2}{2} \\ \alpha^2 - \frac{k^2}{2} & \frac{k^2}{2} \end{pmatrix}, \quad (b^j) = (\alpha \quad k), \quad c = k.$$

Also

- $|k| > 1 \Rightarrow \alpha^2\left(k^2 - \alpha^2\right) > 0$
- $|k| < 1 \Rightarrow \alpha^2\left(k^2 - \alpha^2\right) < 0$
- $k = 1 \Rightarrow \alpha^2\left(k^2 - \alpha^2\right) = 0$ und $\ker(A) \neq \ker(b) \Rightarrow \alpha = 0$ oder $\alpha = -1$ 3 Punkte

Somit folgt $\alpha = -1$. 1 Punkt

b) Finde die Ableitung (im Sinne der Distributionen) der Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x + 2 & , \quad x < 1 \\ 2 & , \quad 1 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & , \quad x > 2\,. \end{cases}$$

[*5 Punkte*]

Bitte wenden!

Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Dann ist 1 Punkt

$$\begin{aligned} Df(\varphi) &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\ &= \underbrace{-\int_{-\infty}^{1} f(x)\varphi'(x)dx}_{=A} \underbrace{-\int_{1}^{2} f(x)\varphi'(x)dx}_{=B} \underbrace{-\int_{2}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx}_{=C}. \end{aligned} \tag{1}$$

Also 1 Punkt

$$A = -f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{1} + \int_{-\infty}^{1} \varphi(x)dx = -3\varphi(1) + \int_{-\infty}^{1} \varphi(x)dx \tag{2}$$

1 Punkt

$$B = -f(x)\varphi(x)|_{1}^{2} = -2\varphi(2) + 2\varphi(1) \tag{3}$$

1 Punkt

$$C = -f(x)\varphi(x)|_{2}^{\infty} + \int_{2}^{\infty} \varphi(x)dx = \varphi(2) + \int_{2}^{\infty} \varphi(x)dx. \tag{4}$$

Somit 1 Punkt

$$Df(\varphi) = A + B + C = -\varphi(1) - \varphi(2) + \int_{-\infty}^{1} \varphi(x)dx + \int_{2}^{\infty} \varphi(x)dx. \tag{5}$$

2. Bestimme mithilfe der Methode der Charakteristiken die Funktion u auf $\{x \geq 1\} \times \{y \geq 1\}$, welche folgende Gleichung erfüllt:

$$x^3 u_x \;=\; y^3 u_y \qquad \text{mit der Cauchy Bedingung} \qquad \lim_{y\to\infty} u(x,y) \;=\; F\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Die Lösung $u(x,y)$ des Problems wird von der Funktion F abhängen.

[*10 Punkte*]

Sei $(x,y) \in \{x \geq 1\} \times \{y \geq 1\}$. Man löse das System

$$\frac{dx}{dr}(r,s) = x(r,s)^3 \tag{6}$$

$$\frac{dy}{dr}(r,s) = -y(r,s)^3 \tag{7}$$

$$\frac{du}{dr}(r,s) = 0, \tag{8}$$

so dass $(x(r,s), y(r,s)) = (x,y)$ und $\lim_{r\to 0} y(r,s) = \infty$, $\lim_{r\to 0} x(r,s) = s$ und 3 Punkte
$\lim_{r\to 0} u(r,s) = F(1/s^2)$. Aus den Gleichungen oben folgt also, dass 1 Punkt

Siehe nächstes Blatt!

$$-\frac{1}{2x(r,s)^2}+\lim_{r\to 0}\frac{1}{2x(r,s)^2}=r \tag{9}$$

$$\frac{1}{2y(r,s)^2}-\lim_{s\to 0}\frac{1}{2y(r,s)^2}=r \tag{10}$$

$$u(r,s)=\lim_{r\to 0}u(r,s)=F(1/s^2). \tag{11}$$

Also $r = 1/2y(r,s)^2$ und somit $\lim_{r\to 0} 1/2x(r,s)^2 = 1/2s^2 = 1/2x(r,s)^2 + 1/2y(r,s)^2$. Das heisst, 3 Punkte 2 Punkte

$$u(x,y)=F(1/x^2+1/y^2). \tag{12}$$

1 Punkt

3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene beschränkte Teilmenge mit glattem Rand und sei g eine glatte Funktion auf U einschliesslich des Randes. Beweise, dass die Lösung der Laplace Gleichung auf U mit Randbedingung g eindeutig ist.

[*10 Punkte*]

Seien u_1, u_2 zwei Funktionen, die beide 1 Punkt

$$\Delta u_i = 0 \text{ in } U \tag{13}$$

$$u_i = g \text{ auf } \partial U \tag{14}$$

erfüllen. Dann folgt, dass die Funktion $v = u_1 - u_2$ die Laplacegleichung 3 Punkte

$$\Delta v = 0 \text{ in } U \tag{15}$$

$$v = 0 \text{ auf } \partial U \tag{16}$$

erfüllt. Das Maximumsprinzip besagt nun, dass 1 Punkt

2 Punkte

$$\sup_U v = \sup_{\partial U} v = 0 \tag{17}$$

$$\inf_U v = \inf_{\partial U} v = 0. \tag{18}$$

Also ist $v = 0$ in U und somit $u_1 = u_2$. 2 Punkte

4. Löse unter Anwendung der Separation der Variablen

$$\left\{\begin{array}{rclcrcl} u_{tt} - u_{xx} & = & u & & & & \\ u(0,t) & = & 0 & , & u(\pi,t) & = & 0 \\ u(x,0) & = & f(x) & , & u_t(x,0) & = & g(x) \end{array}\right\} \quad \text{wobei} \quad (x,t)\in[0,\pi]\times[0,\infty).$$

Die Lösung $u(x,t)$ wird von den Funktionen f und g abhängen.

Bitte wenden!

[*10 Punkte*]

Ansatz: $v(x,t) = X(x)T(t)$ als Lösung des homogenen Teils. Es folgt, dass

$$T''(t)X(x) - X''(x)T(t) = X(x)T(t). \tag{19}$$

Also

$$X''(x) = \lambda X(x) \tag{20}$$

und 1 Punkt

$$T''(t) = (1+\lambda)T(t). \tag{21}$$

In der vorletzten Gleichung lassen sich drei Fälle unterscheiden.

- $\lambda > 0$ 1 Punkt
  Also $X(x) = A\cosh(\sqrt{\lambda}x) + B\sinh(\sqrt{\lambda}x)$. Aus den homogenen Randbedingungen folgt, dass $A = 0$ und $B = 0$.
- $\lambda = 0$ 1 Punkt
  Also $X(x) = A + Bx$. Aus den homogenen Randbedingungen folgt, dass $A = 0$ und $B = 0$.
- $\lambda = -\omega^2 < 0$ 2 Punkte
  Also $X(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$. Aus den homogenen Randbedingungen folgt, dass $A = 0$ und $\omega \in \mathbb{Z}$. Also

$$X_j(x) = B_j \sin(jx), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{22}$$

Für $T_j(t)$ erhalten wir also $T_1(t) = C_1 t + D_1$ und $T_j(t) = C_j \sin(\sqrt{j^2-1}t) + B_j \cos(\sqrt{j^2-1}t)$, falls $j^2 > 1$. Also ist $u(x,t)$ von der Form 2 Punkte

$$u(x,t) = \sum_{j=2}^{\infty} C_j \sin(\sqrt{j^2-1}t)\sin(jx) + D_j \cos(\sqrt{j^2-1}t)\sin(jx) + (C_1 t + D_1)\sin(x), \tag{23}$$

wobei aus den Anfangsbedingungen folgt, dass

$$D_j = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(jx)dx \tag{24}$$

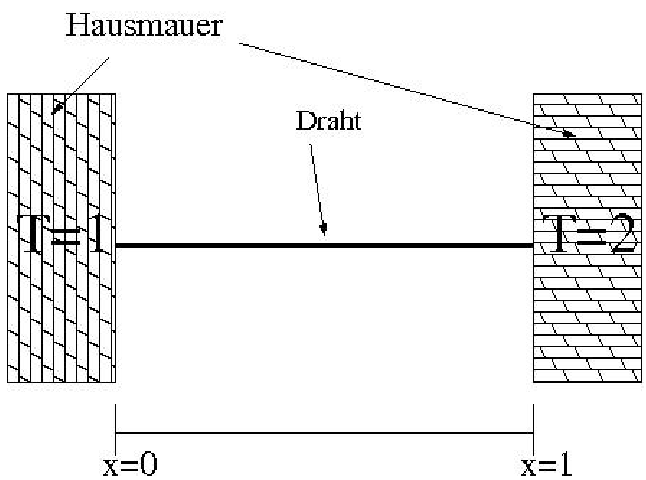
und 1 Punkt

$$C_j = \frac{1}{\sqrt{\max\{1, j^2-1\}}}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin(jx)dx. \tag{25}$$

1 Punkt

Siehe nächstes Blatt!

5. Ein Draht der Länge 1 sei zwischen zwei Hausmauern gespannt (siehe Skizze). Das eine Haus werde so beheizt, dass in der Hausmauer konstant Temperatur 2 herrsche. Die Temperatur der zweiten Hausmauer sei dagegen konstant 1. Man nehme an, dass Wärmeaustausch zwischen Draht und Umgebung nur an den Enden des Drahtes, welche in der Mauer befestigt sind, stattfindet. Bezeichne $u(x,t)$ die Temperatur des Drahtes im Punkt $x \in [0,1]$ und zur Zeit $t \geq 0$. Zur Zeit $t = 0$ sei die Temperaturverteilung im Draht gegeben durch $f(x)$. Im folgenden seinen alle relevanten physikalischen Konstanten auf 1 skaliert.



a) Bestimme das Problem (Gleichung, Rand-/Anfangsbedingungen) welches $u(x,t)$ löst.

b) Löse das Problem mit den gegebenen Daten.

c) Was passiert mit der Lösung für grosse Zeiten ? Rechtfertige dies physikalisch.

[*10 Punkte*]

a) Das Problem lautet also

$$\Delta u(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{26}$$
$$u(x,0) = f(x) \tag{27}$$
$$u(0,t) = 1 \tag{28}$$
$$u(1,t) = 2. \tag{29}$$

Bitte wenden!

b) Um dieses Problem zu lösen, setze $v(x,t) = u(x,t) - (1+x)$. Somit löst v das homogene Randwertproblem

$$\Delta v(x,t) - \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{30}$$
$$v(x,0) = f(x) - (1+x) \tag{31}$$
$$v(0,t) = 0 \tag{32}$$
$$v(1,t) = 0. \tag{33}$$

Wir wählen den Ansatz $X(x)T(t)$ und erhalten

$$X''(x) = \lambda X(x) \text{ und } T'(t) = \lambda T(t). \tag{34}$$

Wieder lassen sich drei Fälle unterscheiden:

- $\lambda > 0$
  Also $X(x) = A\cosh(\sqrt{\lambda}x) + B\sinh(\sqrt{\lambda}x)$. Aus den homogenen Randbedingungen folgt, dass $A = B = 0$.
- $\lambda = 0$
  Also $X(x) = A + Bx$. Aus den homogenen Randbedingungen folgt, dass $A = B = 0$.
- $\lambda < 0$
  Also $X(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x)$. Aus den Randbedingungen folgt, dass $\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{Z}\pi$, also

$$X_j(x) = B_j \sin(\pi j x). \tag{35}$$

Somit $T(t) = e^{-j^2\pi^2 t}$. Also

$$v(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin(\pi j x) e^{-\pi^2 j^2 t}, \tag{36}$$

wobei

$$B_j = 2\int_0^1 (f(x) - (x+1))\sin(j\pi x)dx. \tag{37}$$

Die Lösung $u(x,t)$ ist also

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin(\pi j x) e^{-\pi^2 j^2 t} + (x+1). \tag{38}$$

c) Aus der obigen Lösung lässt sich leicht schliessen, dass $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = x+1$. Physikalisch wird ein thermisches Gleichgewicht erreicht.

[***Gesamtpunktzahl: 50 Punkte***]