ETH Zürich | Winter 2018

Prof. Dr. F. Da Lio

Exam Analysis III
D–MAVT, D–MATL

Please fill!

Surname:	
First Name:	
Student Card Nr.:	

Please do not fill!

Exercise	Value	Points	Control
1	7		
2	7		
3	8		
4	12		
5	14		
Total			

Please do not fill!

Completeness	

Important: Before the exam starts, please

- Turn off your mobile phone and place it inside your Briefcase/Backpack.
- Put your bags on the floor. No bags on the desk!
- Place your Student Card (Legi) on the desk.
- Fill in the front page of the exam with your generalities.

During the exam, please

- Start every exercise on a new piece of paper.
- Put your name on the top right corner of every page.
- You are expected to motivate your answers. Please write down calculations and intermediate results.
- Provide at most **one** solution to each exercise.
- **Do not** write with **pencils**. Please avoid using **red** or **green** ink pens.

Allowed aids:

- 20 pages (=10 sheets) DIN A4 handwritten or typed summary.
- An English dictionary.

Not allowed:

No further aids are allowed. Especially neither communication devices nor pocket calculators.

Good Luck!

Laplace Transforms:

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	t^2	$\frac{2!}{s^3}$
4	$t^n,\ n \in \mathbb{N}_0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
5	$t^a,\ a > 0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
7	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
8	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
9	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
10	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
11	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
12	$\delta(t-a)$	e^{-as}

(Γ=Gamma function, u=Heaviside function, δ=Delta function)

1. Classification of PDE's (*7 Points*)

Decide whether the following PDE's of $u(x, y)$ are linear or not and determine their order. In the linear case decide whether the PDE is homogeneous or not. Finally, for linear PDE's of 2nd order determine its type (elliptic, hyperbolic or parabolic). $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ if not stated otherwise.

a) $u^3 u_{yy} - (x^2 - 1)u_{xx}u_y + \sin(y)x = 0$

b) $4x\sqrt{y}u_{xy} - e^y u_x + xyu_{yy} + 4xy^3 u_{xx} = xy$ on $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 < y < 1\}$

c) $\cos(x)u_{xyy} + x^2 u_x + yu_{yy} = e^y + u$

2. Laplace Trasform (*7 Points*)

Solve the following integral equation using the Laplace transform:

$$y(t) + 2e^t \int_0^t y(\tau)e^{-\tau} d\tau = te^t,\ t > 0. \tag{1}$$

3. Wave Equation (*8 Points*)

Let $c > 0$. Consider the following initial value problem:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2}\sin^2(x) + x & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = xe^{-x^2} & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

a) Use D'Alembert's formula to find the solution $u(x,t)$ of (2).

b) For a fixed $a \in \mathbb{R}$, determine the limit

$$\lim_{t\to\infty} u(a,t). \tag{3}$$

4. Heat Equation (*12 Points*)

a) We recall that for every $a > 0$ the Fourier transform of the Gaussian e^{-ax^2} is given by

$$\mathcal{F}\left[e^{-ax^2}\right](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}. \tag{4}$$

Let $a > 0$ be fixed. From (4) deduce the integrals

(i) $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$

(ii) $\int_{\mathbb{R}} x\,e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$

(iii) $\int_{\mathbb{R}} x^2\,e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$.

Hint:

$$\mathcal{F}\left[x^k f(x)\right](\omega) = i^k \frac{d^k}{d\omega^k}\mathcal{F}\left[f(x)\right](\omega) \tag{5}$$

b) Recall that the solution $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ of the heat equation

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{6}$$

is given by

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)K(x-y,t)\,\mathrm{d}y, \tag{7}$$

where

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \tag{8}$$

is the so-called *Heat Kernel* .

Compute explicitily the solution of the initial value problem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = x^2 & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{9}$$

Hint: Use directly the representation (7) and the results from part 4a).

5. Laplace Equation (*14 Points*)

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be the **odd** 2π**-periodic extension** of the function

$$g(x) = x(\pi - x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \tag{10}$$

a) Draw the graph of f and determine the real Fourier series of f.

b) Let $u : [0,\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ be the solution of the following boundary value problem:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 & \Big| \; x \in (0,\pi), y \in (0,\pi) \\ u(x,0) = 0 & \Big| \; x \in [0,\pi] \\ u(0,y) = 0 & \Big| \; y \in [0,\pi] \\ u(\pi,y) = 0 & \Big| \; y \in [0,\pi] \\ u(x,\pi) = x(\pi - x) & \Big| \; x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{11}$$

Determine the solution u by describing the steps of the method of separation of variables.

Wichtig: Bevor Sie mit der Prüfung beginnen, bitte

- schalten sie ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es in der Tasche,
- belassen Sie keine Taschen auf dem Tisch,
- legen Sie Ihre Legi auf den Tisch,
- füllen Sie das Deckblatt mir Ihrem Namen und Ihrer Leginummer aus.

Während der Prüfung, bitte

- starten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt,
- schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt,
- motivieren Sie Ihre Antwort und schreiben Sie Rechnungen und Zwischenschritte auf,
- geben Sie nur eine Löseung pro Aufgabe ab,
- schreiben Sie weder mit Bleistift noch mit einem grünen oder roten Stift.

Erlaubte Hilfsmittel:

- 20 Seiten (=10 Blätter) DIN A4 von hand geschriebene oder getippte Zusammenfassung.
- English Wörterbuch

Nicht erlaubt:

Keine weiteren Hilfsmittel sind erlaupt, insbesondere keine Kommunikationsmittel und Taschenrechner.

See next page!

1. **Klassifizierung von PDGL's**
   Entscheiden Sie, ob die PDGL's von $u(x, y)$ linear sind oder nicht und bestimmen Sie deren Ordnung. Im linearen Fall entscheiden Sie, ob die PDGL homogen ist oder nicht. Für lineare PDGL's 2. ordung bestimmen Sie den Typ (elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch). $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ falls nichts anderes vermerkt ist.

2. **Laplace Trasformation**
   Lösen Sie die Integralgleichung (1) unter Verwendung der Laplace Transformation.

3. **Wellengleichung**
   Sei $c > 0$. Wir betrachten das Anfangswertproblem (2).

   a) Finden Sie die Lösung $u(x, t)$ von (2) mit Hilfe der Formel von D'Alembert.

   b) Für ein fixes $a \in \mathbb{R}$, bestimmen Sie den Limes (3).

4. **Wärmeleitungsgleichung**

   a) Sei $a > 0$. Die Fourier Transformation einer Gaussfunktion e^{-ax^2} ist in Formel (4) gegeben.

   Wir fixiren ein $a > 0$. Unter Verwendung von (4) bestimmen Sie die Integrale (i), (ii), (iii) in Aufgabe 4a).

   Tipp: Formel (5)

   b) Die Lösung $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ der Wärmeleitungsgleichung (6) ist gemäss Ansatz (7) durch den sogenannte *Wärmeleitungskern* $K(x, t)$ (8) gegeben.

   Berechnen Sie explizit die Lösung des Anfangswertproblems (9).

   Tipp: Verwenden Sie die Darstellung (7) und die Resultate von Aufgabe 4a).

5. **Laplace Gleichung**

   Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die **ungerade 2π-periodische Erweiterung** der Funktion (10).

   a) Zeichnen Sie den Graph von f und bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f.

   b) Sei $u : [0, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ die Lösung des Randwertproblems (11).

   Bestimmen Sie die Lösung u und berschreiben Sie dabei die Schritte der Methode der Separation der Variabeln.