Analysis Übungsstunde 1

gtuerler@student.ethz.ch

19.09.24

Laplace Transformation

Definition

$$f(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \mathcal{L}(f)(s) = F(s) \quad ;$$

Regeln:

→ Linearität:
Konstanten
Addition/Subtraktion

→ Multiplikation ! $\mathcal{L}(f \cdot g) \neq \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$

→ s-Shifting

→ t-shifting

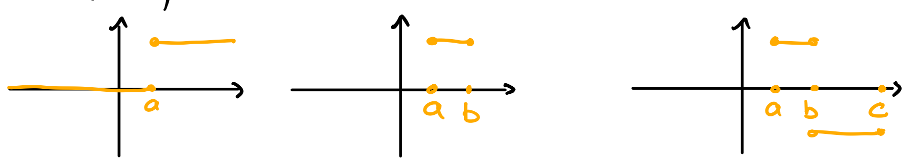
→ Was ist u?

Heavyside function: $u(t)$ (step function)

$$u(t-a) = \begin{cases} 1 & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

step bei a (nicht stetig)

$u(t-a)$ $\quad$ $u(t-a) - u(t-b)$ $\quad$ $u(t-a) - 2u(t-b) + u(t-c)$



Lösen & Rezept $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^{-1}$

Ziel → so in Form bringen, damit es mit Tabellierten $\mathcal{L}$ lösbar ist.

Anwenden von
-
-
-
-

$f(t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\underset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightleftarrows}}$	$F(s)$
$f(t)$	$\mathscr{L}(f(t)) = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$	s^n
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f^n(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - ... - f^{n-1}(0)$
$f * g(t)$	$F(s) \cdot G(s)$
$t^n \ \ (n = 0, 1, 2, ...)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$sin(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
$sin^2(kt)$	$\frac{2k^2}{s(s^2+4k^2)}$
$cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
$cos^2(kt)$	$\frac{s^2+2k^2}{s(s^2+4k^2)}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$ln(at)$	$-\frac{1}{s}\left(ln\left(\frac{s}{a}\right) + \gamma\right)$
$sinh(kt)$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
$cosh(kt)$	$\frac{s}{s^2-k^2}$
$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
$\frac{ae^{at}-be^{at}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$

$f(t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\underset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightleftarrows}}$	$F(s)$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$-tf(t)$	$F'(s)$
$t^2 f(t)$	$F''(s)$
$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
$\int\limits_0^t f(u)du$	$\frac{1}{s}F(s)$
$\int\limits_0^t \frac{(t-q)^{n-1}f(q)}{(n-1)!}dq, \ {\scriptstyle n \le 1}$	$\frac{1}{s^n}F(s), \ n \geq 1$
$\frac{1}{t}f(t)$	$\int\limits_s^\infty F(u)du$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$e^{at}sin(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$
$e^{at}cos(kt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$
$e^{at}sinh(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2-k^2}$
$e^{at}cosh(kt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2-k^2}$
$tsin(kt)$	$\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$
$tcos(kt)$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$
$tsin(t)cos(t)$	$\frac{2s}{(s^2+4)^2}$
$tsinh(kt)$	$\frac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$
$tcosh(kt)$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2-k^2)^2}$
$sin(at) \cdot f(t)$	$\frac{1}{2i} \cdot (F(s-ia) - F(s+ia))$
$cos(at) \cdot f(t)$	$\frac{1}{2} \cdot (F(s-ia) + F(s+ia))$
$sinh(at) \cdot f(t)$	$\frac{1}{2} \cdot (F(s-a) - F(s+a))$
$cosh(at) \cdot f(t)$	$\frac{1}{2} \cdot (F(s-a) + F(s+a))$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}e^{-a^2/4t}}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$
$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$

Bsp 1 Linearität finde $\mathcal{L}$

$f(t) = 1 + 2t^2$

$t^n \quad (n = 0, 1, 2, ...) \qquad \frac{n!}{s^{n+1}}$

Bsp 2 PBZ, t-shift, Linearität finde $\mathcal{L}^{-1}$

$$F(s) = \frac{5s-3}{s^2-3s+2}$$

: ZF $e^{at} \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{s-a}$

Bsp 3 Erweitern: finde $\mathcal{L}^{-1}$

$$F(s) = \frac{1}{s^2+6s+13} =$$

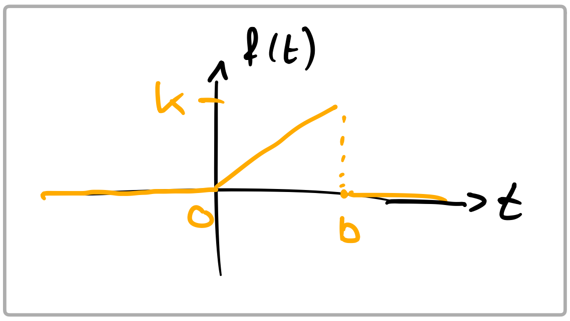
$sin(kt) \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{k}{s^2+k^2}$

Bsp 4 evtl. $\mathcal{L}^{-1}$?

$$F(s) = \frac{1}{s^4} =$$

Bsp 5 rechnen ohne Tabellen, $\mathcal{L}$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{k}{b} \cdot t & , t \in [0, b] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



Bsp 6 $\mathcal{L}$

$$f(t) = \sin(\omega t)$$