Analysis Übungsstunde 2

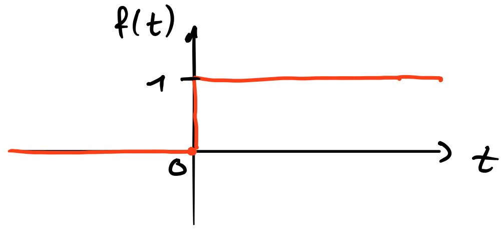
qtuerler@student.ethz.ch

26.09.24

Heavyside funktion (nochmals)

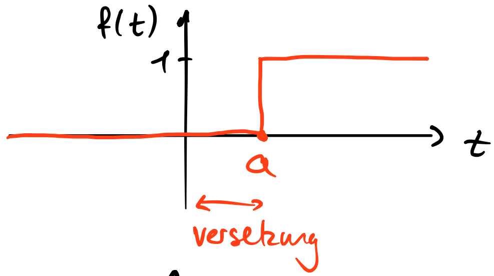
- Basic Heavyside

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



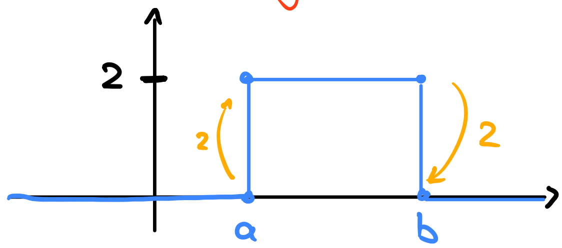
- Mit Versetzung

$$u(t-a) = \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

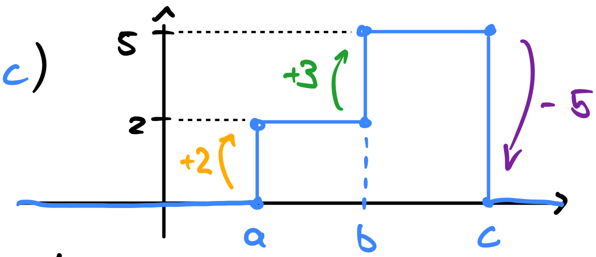


- Mehrere Heavysides

$$f(t) = 2u(t-2) - 2u(t-b)$$



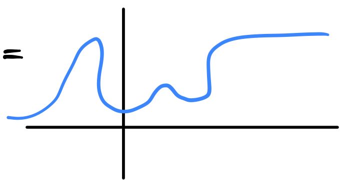
$$f(t) = 2u(t-a) + 3u(t-b) - 5u(t-c)$$



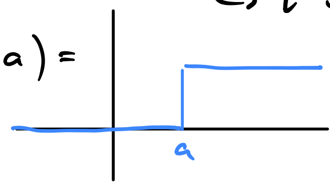
- Heavyside mit Funktion multipliziert

↳ t-shifting !!

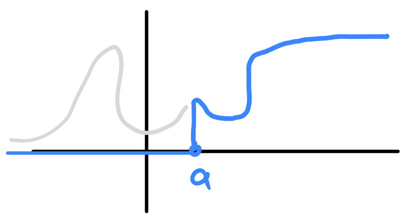
$f(t) =$



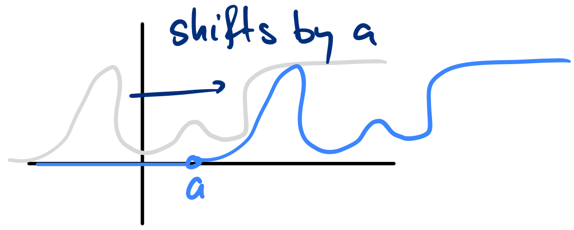
$u(t-a) =$



$f(t) \cdot u(t-a)$



$f(t-a) \cdot u(t-a)$



Tipps für T-Shifting

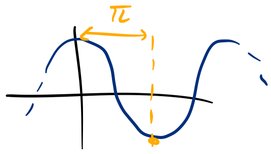
$$\mathscr{L}(f(t-a)u(t-a)) = e^{-as}F(s)$$
$$\mathscr{L}(f(t)u(t-a)) = e^{-as}\mathscr{L}(f(t+a))$$

!

Ziel: $f(t)$ umformen, in die Form $f(t-a)\cdot u(t-a)$

- **Trigonometrische Funktionen**

  Nutze Periodizität & Additionstheorem



  Bsp) $u(t-\pi)\cdot\cos(t) =$

  Bsp) $u(t-3)\cdot\sin(t-2) =$

11.1.3 Additionstheoreme 99

- $\sin(x)^2+\cos(x)^2 = 1 \Rightarrow \sin(x) = \sqrt{1-\cos(x)^2}$
- $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$
- $\cos(x) = 2\cos(\frac{x}{2})^2-1 = \cos(\frac{x}{2})^2-\sin(\frac{x}{2})^2$
- $\tan(a\pm b) = \frac{\tan(a)\pm\tan(b)}{1\mp\tan(a)\tan(b)}$

- **Ergänzen & erweitern**

  Bsp $u(t+3)\cdot t^2 =$

Ableitungen der Laplacetransformation

Zeitbereich

#ableitungen

$$\mathcal{L}(f^{n}(t))(s) = s^n \mathcal{L}(f) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} \cdot f^{j}(0)$$

oft gebraucht:

$$\mathcal{L}(f''(t))(s) = s^2 \mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}(f'''(t))(s) = s^3 \mathcal{L}(f) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Frequenzbereich

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \cdot F(s) \quad , n = 1,2,3\dots$$

Integration der Laplacetransformation

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\,dx \right) = \frac{1}{s} \cdot F(s)$$

⇒ Rezept Lösen DGL

1) DGL finden (eigentlich immer gegeben)
2) Beide Seiten Transformieren $f(t) \to \mathcal{L}$
3) Nach $Y(s)$ auflösen
4) Inverse Laplacetransformation $\mathcal{L}^{-1} \to f(t)$

Bsp: 1 $\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\mathcal{L}(y(t)) = Y(s)}$$

2 transformiere:

3 Auflösen nach $Y(s)$

4 Rücktransformation

Bsp Inhomogene DGL:

① $\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = t^3 \cdot e^{-2t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

② Transformiere beide Seiten

③

④ Rücktransformation

Tipps für die Serie 2

1. Basics – wichtig

   a) erweitern

   b) $25 = 5^2 \to \dots$ ZF

   c–e) PBZ, teil etwas kompliziert

2. a) s-shift und erw.

   b) $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

   c,d) nutze ableitungsregel der $\mathcal{L}$aplace transformation

   e,f) t-shifting

   g) t-shifting und geschickt erweitern

3. a,b) Schreibe es als multiplikation mit der Heavyside $u(t-a)$

4,5) DGL wie in der übungsstunde → Rezept

6. Proof, nicht wirklich relevant