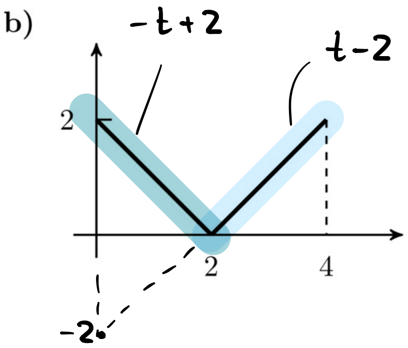
Analysis Übungsstunde 3

gtuerler@student.ethz.ch

03.01.24

Kurze Nachbesprechung Serie 1, Aufg. 1b)

b)

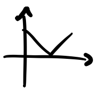


$$\rightarrow f(t) = \begin{cases} -t+2 & t \in [0,2] \\ t-2 & t \in [2,4] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \Rightarrow \mathcal{L} = ?$$

$$\mathscr{L}(u(t-a)) = \frac{e^{-as}}{s}$$

$$\mathscr{L}(f(t-a)u(t-a)) = e^{-as}F(s)$$

Anstatt Integral, Drücke $f(t)$ mit der Heavyside aus!

 $= g(t)\big(u(t-0) - u(t-2)\big) + h(t)\big(u(t-2) - u(t-4)\big)$

$f(t) =$

Dirac Funktion $\delta(t-a)$

$$f(t) = \delta(t-a) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = a \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Regeln:

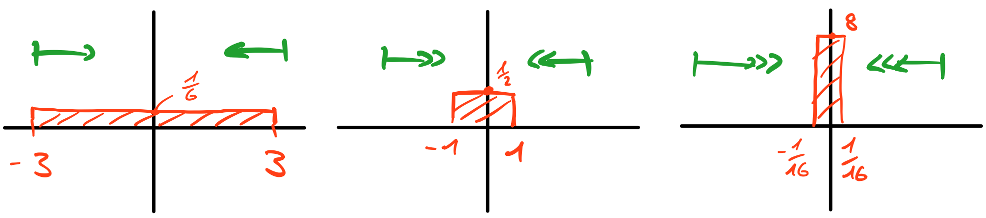
I) $\int_0^\infty \delta(t-a) = 1$

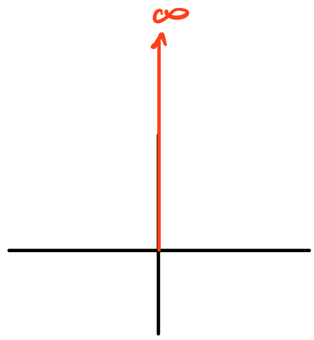
II) $\int_0^\infty g(t)\cdot \delta(t-a) = g(a)$

III) $\mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-sa}$

$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$

(I) Bsp: $\int_0^\infty \delta(t-a) = 1$

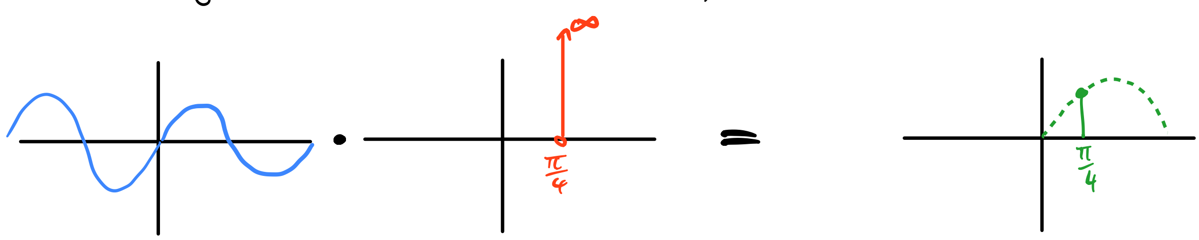




A= A= A= A =

(II) Bsp $\int_0^\infty g(t)\cdot\delta(t-a)$

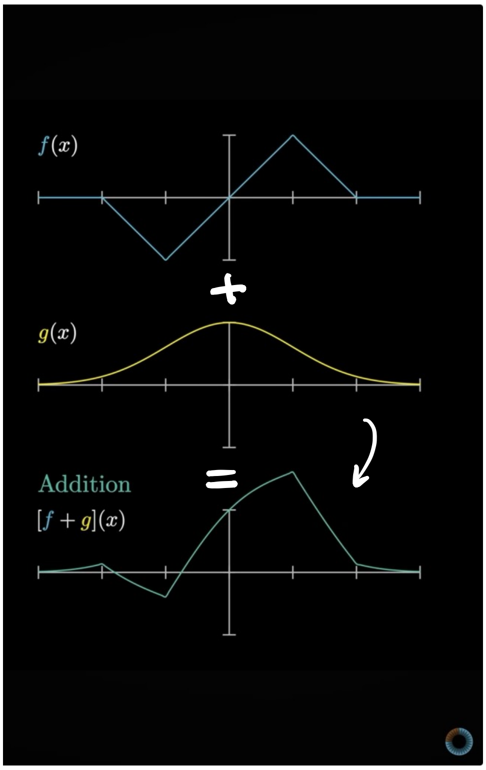
zB: $g(t) = \sin(t)$, $\delta = \delta(t-\frac{\pi}{4})$

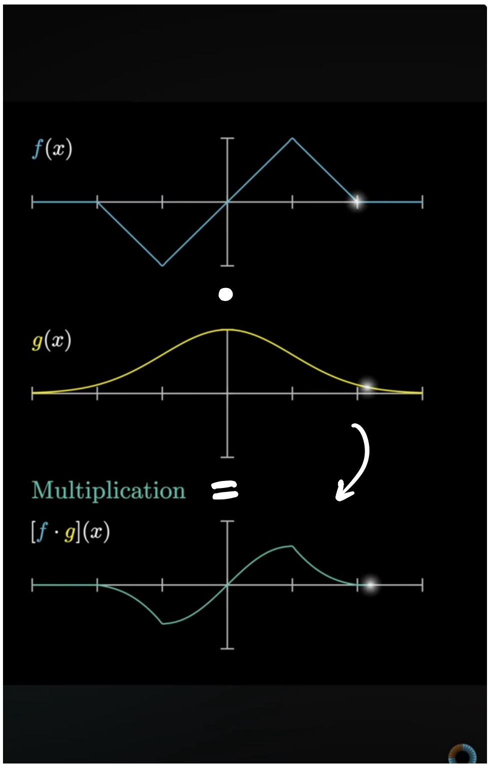


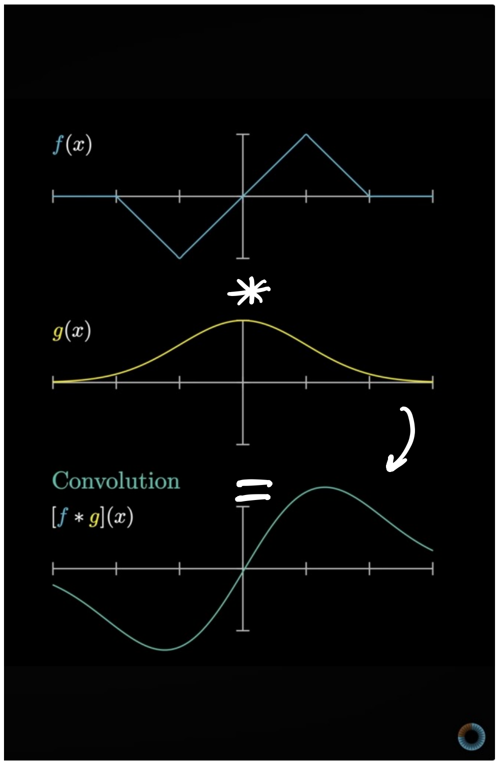
Faltung / Convolution

Wie interagieren zwei funktionen miteinander?

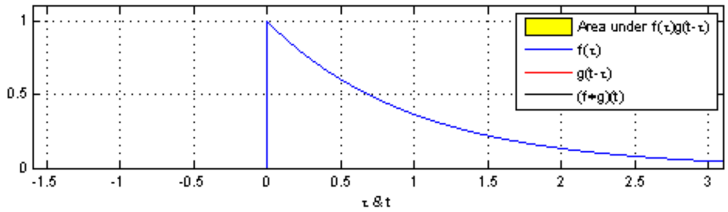
1. Addition ±
2. Multiplikation •, ÷
3. Convolution



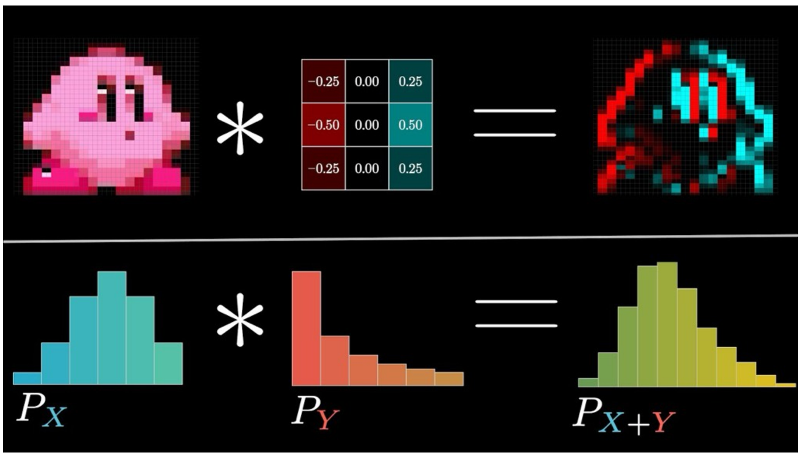




"Interaktion von zwei funktionen über die Zeit"



3B1B :



Info 2

Analysis 3

Theory https://www.youtube.com/watch?v=KuXjwB4LzSA

Analogie : https://www.youtube.com/watch?v=QmcoPYUfbJ8

Faltung / Convolution

Remember? $\mathcal{L}(f\cdot g) \neq \mathcal{L}(g\cdot f)$ neu: Faltung

Kombinieren von funkt: $f \pm g$, $f \cdot / g$
neu dritte operation $f * g$

Def: $f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$

Convolution

Beweis:
$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$

Eigenschaften

(I) $f * g = g * f$ (kommutiert!)

(II) $f * (g * h) = (f * g) * h$ (assoziativ)

(III) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$ (distributiv)

(IV) $f * 0 = 0$

(V) $f * 1 \neq f$

Wie in Laplace anwenden?

inverse

- $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(\overbrace{f(t)}^{F(s)}) \cdot \mathcal{L}(\overbrace{g(t)}^{G(s)})$
- $\mathcal{L}^{-1}(F(s)\cdot G(s)) = (f * g) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$
- $\mathcal{L}(f * 1) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$

Anmerkungen T-Shifting:

- T-Shift & S-Shift gemischt → Reihenfolge!

Bsp. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{(s+3)^2}\right)(t)$

- Ansatz $\mathscr{L}(f(t)u(t-a)) = e^{-as}\mathscr{L}(f(t+a))$

↳ geht, aber $f(t+a)$ muss ausmultipliziert sein

Bsp: $\mathcal{L}\left(t^2 \cdot u(t-2)\right)(s)$

Prüfung Winter 2018:

2. Laplace Trasform (*7 Points*)
Solve the following integral equation using the Laplace transform:

$$y(t) + 2e^t \int_0^t y(\tau)e^{-\tau} d\tau = te^t,\ t > 0. \qquad (1)$$

Konzept gleich wie DGL: ① Funktion

② Transformiere

(I) $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

(II) $\boxed{\mathscr{L}(f * g) = \mathscr{L}(f) \cdot \mathscr{L}(g)}$

(III) $e^{at} \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \frac{1}{s-a}$

③ Nach Y(S) auflösen

④ Rücktransform

$sinh(kt) \qquad \frac{k}{s^2-k^2}$

Aufgabe 2

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s(s^2+4)}\right) =$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(F(s)\cdot G(s)) = (f * g) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau}$$

$1 \qquad \frac{1}{s} \qquad sin(kt) \qquad \frac{k}{s^2+k^2}$

⇒ Lösen DGL

1) DGL finden (eigentlich immer gegeben)
2) Beide Seiten Transformieren $f(t) \rightarrow \mathcal{L}$
3) Nach $Y(s)$ auflösen
4) Inverse Laplacetransformation $\mathcal{L}^{-1} \rightarrow f(t)$

MC Winter 2023

1.MC1 [3 Points] Let f be a solution of the following ordinary differential equation (ODE),

$$\begin{cases} f''(t) + \omega^2 f(t) = 0, & t > 0 \\ f(0) = 1, \quad f'(0) = 2\omega, \end{cases}$$ (1)

where $\omega > 0$ is a positive constant. Find the Laplace transform $\mathcal{L}(f) = F$ of the function f.

(A) $F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} + \frac{2\omega}{s^2+\omega^2}$.
(B) $F(s) = \frac{1}{s^2+\omega^2} + \frac{2s\omega}{s^2+\omega^2}$.
(C) $F(s) = \frac{2\omega}{s+\omega^2}$.
(D) $F(s) = \frac{2\omega}{s^2+\omega}$.

(2)

DGL was wenn AWP $y(a) = ..$ $y'(a) = ..$

Bsp: $\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) = 4t \\ y(3) = 0 \\ y'(3) = 7 \end{cases}$

Wie vorgehen?

- Substitution mit $\eta = t - \underset{=3 \text{ im Bsp}}{a}$

neue funktion $u(\eta) = y(\eta + a)$
$u'(\eta) = y'(\eta + a)$
$u''(\eta) = y''(\eta + a)$

⇒ Nach substitution gleich wie bei normaler DGL rechnen (Rezept)
⇒ wenn $u(\eta)$ gefunden: Rücksubstitution

formuliere neu:

(1) neu $\Bigg\{$

Wende Rezept an: Transformiere

$$\mathscr{L}(f') = s\mathscr{L}(f) - f(0)$$
$$\mathscr{L}(f'') = s^2\mathscr{L}(f) - sf(0) - f'(0)$$

2

3

4

Tipps für die Serie 3

① Basics – Wichtig

a–e) verschiedene t- und s-shifts

② Convolution: brauche die Formeln

a) brauche $f(t) * g(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s) \cdot G(s))$

b) trig. identity

c) brauche Laplace, nicht integral

③ DGL Rezept

④ DGL und Faltung : schreibe $\frac{G(s)}{s} = \left(G(s) \cdot \frac{1}{s}\right) \to \mathcal{L}^{-1}$ und Faltung

⑤ DGL Rezept mit $\delta(t-a)$

$\mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-sa}$