Analysis Übungsstunde 4

gtuerler@student.ethz.ch

10.10.24

Periodische Funktionen

$f(x)$ ist p-periodisch, wenn $\boxed{f(x) = f(x+p)}$

Eigenschaften

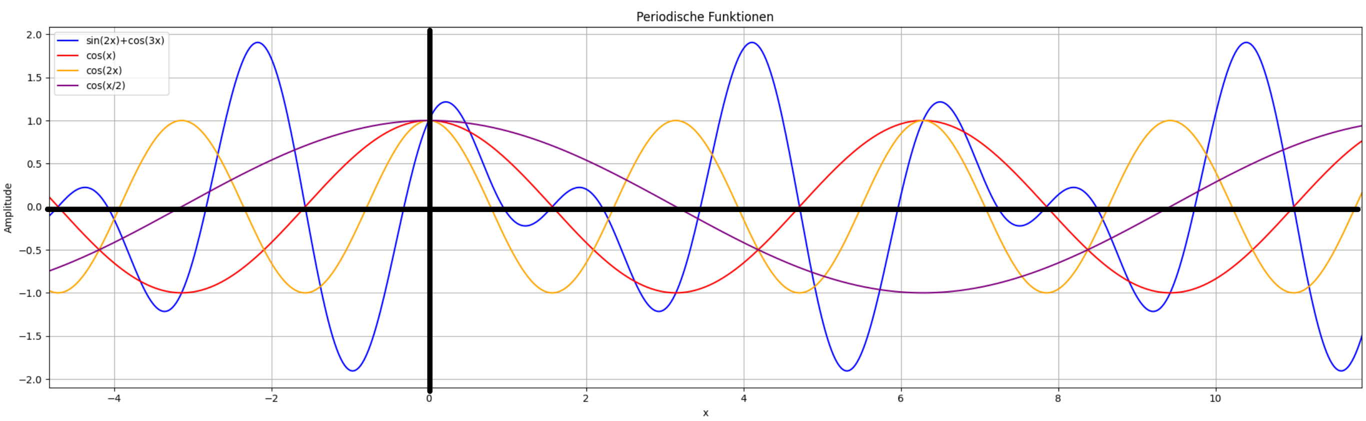
gleiche Periodizität p

def: $f(x) = f(x+p)$ $h(x) = h(x+p)$ $g(x) = g(x+d)$

- $f(ax)$ ist $\frac{p}{a}$ - periodisch
- $a \cdot f(x) + b \cdot h(x)$ p-periodisch (beide p-periodisch)
- f und h sind beide $n \cdot p$ - periodisch, $n \in \mathbb{Z}$
- $a \cdot f(x) + c \cdot g(x)$ sind periodisch, falls $\frac{p}{d} \in \mathbb{Q}$

  ↳ Mit Periode $p^* = \text{kgV}(p, d)$

$$\boxed{\text{bei } \sin(kx) \text{ oder } \cos(kx) \Rightarrow p = \frac{2\pi}{k}}$$



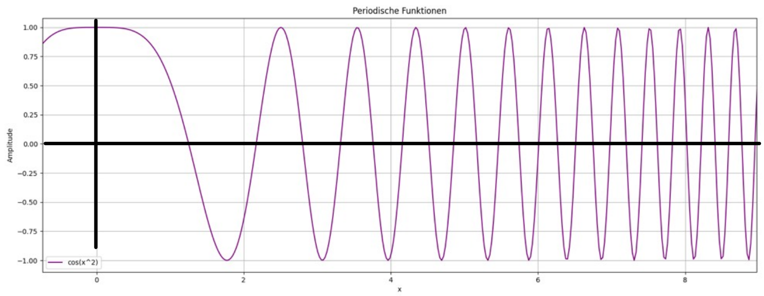
Bsp
- $\cos(x)$ →
- $\cos(\frac{x}{2})$ →

  ↳

- $\cos(2x) \rightarrow$
- $\sin(2x) + \cos(3x)$

Bsp: Zeige, dass $\cos(x^2)$ nicht periodisch ist.

Nullstellen:



Eigenschaften Periodizität & Begrenztheit

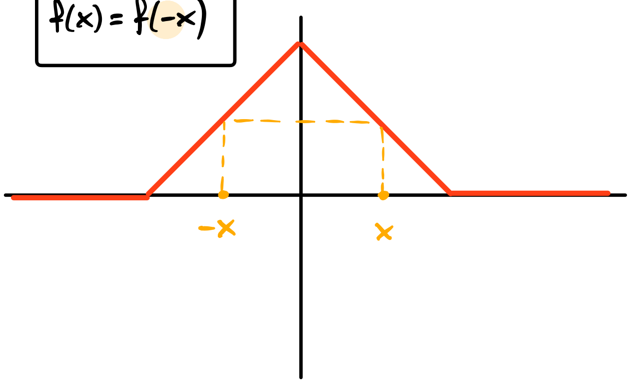
> Es gilt: ist $f(x)$ periodisch & stetig $\Rightarrow$ Begrenzt
>
> Ableitungen
>
> ↳ dann ist $f^n(x)$ auch periodisch & stetig $\Rightarrow$ Begrenzt

$\cos(x^2)$

Gerade & Ungerade Funktionen

Gerade

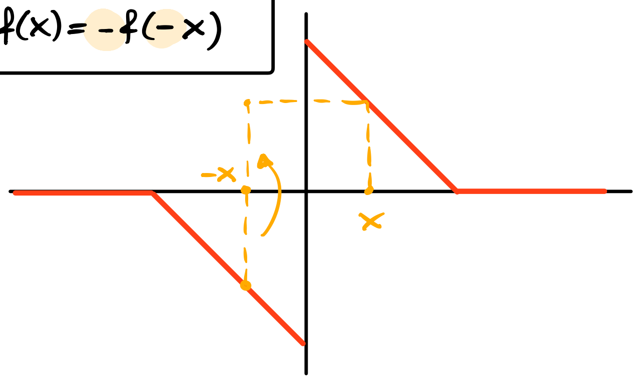
$f(x) = f(-x)$



Bsp: $\cos(x)$

Ungerade

$f(x) = -f(-x)$



Bsp: $\sin(x)$, $\tan(x)$

Eigenschaften

$g_1(x)$ & $g_2(x)$ $\rightarrow$ gerade

- $g_1 \cdot g_2$: gerade
- $u_1 \cdot u_2$: gerade
- $u_1 \cdot g_1$: ungerade
- $\int_{-a}^{a} g_1(x) = 2 \int_0^a g_1(x)\,dx$
- $\int_{-a}^{a} u_1(x)\,dx = 0$

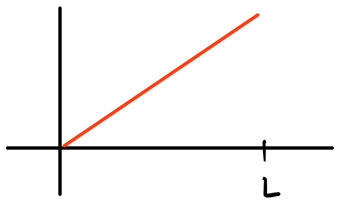
$u_1(x)$ & $u_2(x)$ $\rightarrow$ ungerade

- $u_1 + u_2$: ungerade
- $g_1 + g_2$: gerade
- $\frac{d}{dx}(g(x))$: ungerade
- $\frac{d}{dx}(u(x))$: gerade

$\Rightarrow$ Gerade oder ungerade? $\rightarrow$ Bestimme $f(-x)$

Bsp $f(x) = \cos(2x) + \cos(x^2)$

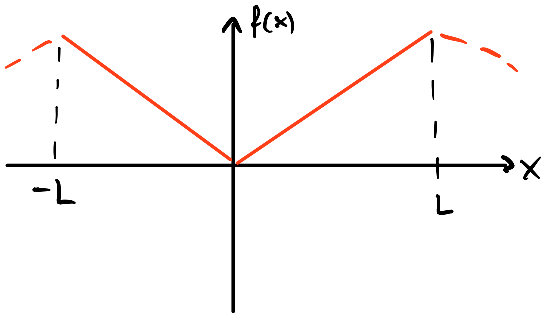
Periodische Fortsetzung



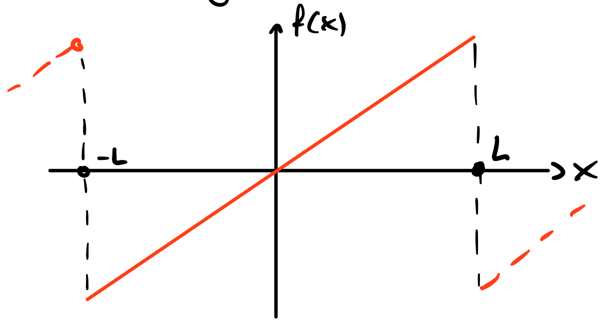
$f(x)$ ist gegeben für $x \in [0, L]$

Fortsetzung soll $2L$-periodisch sein

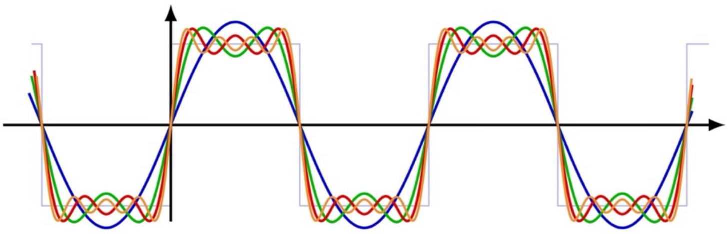
gerade

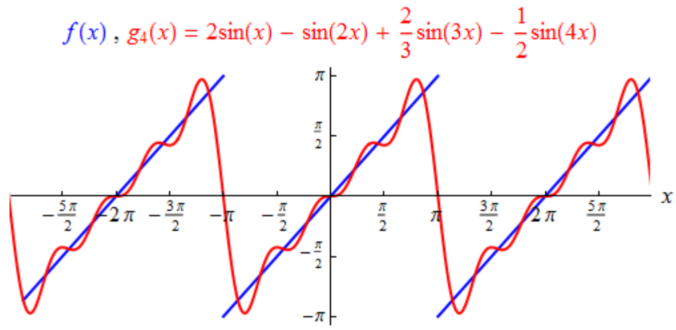


ungerade



Fourier - Reihe

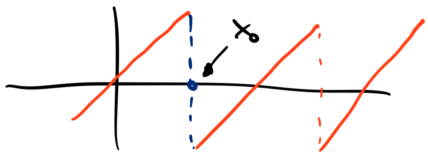




Ziel : Eine funktion $f(x)$ welche $2L$ periodisch ist, als Summe von Sinus & Cosinus schreiben

$f(x)$ kann unstetig sein, muss aber das Drichlet Theorem erfüllen

Drichlet Theorem : $\boxed{\frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right) = f(x_0)}$



$\frac{1}{2}(-1+1) = 0$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

$\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ & $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ sind beide $2L$-Periodisch

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

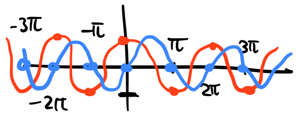
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Wichtige Vereinfachungen

• $f(x)$ gerade	• $f(x)$ ungerade
$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$	$a_0 = 0$
$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$	$a_n = 0$
$b_n = 0$	$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

Wichtige Integrale & Geometrie (ZF S. 9/10)



$$\int_{-L}^{L} cos(\frac{n\pi x}{L}) \cdot cos(\frac{m\pi x}{L}) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ L & \text{für } n = m \\ 2L & \text{für } n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} sin(\frac{n\pi x}{L}) \cdot sin(\frac{m\pi x}{L}) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ L & \text{für } n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} sin(\frac{n\pi x}{L}) \cdot cos(\frac{m\pi x}{L}) dx = 0 \;\; \forall \; n, m$$

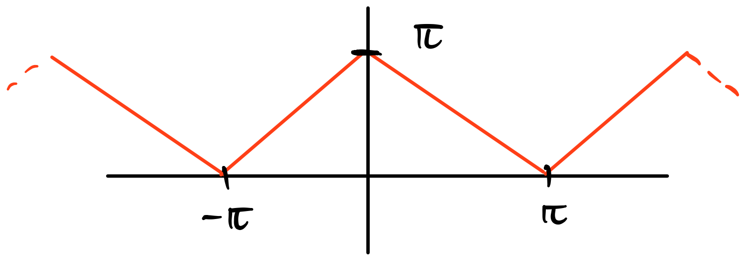
$sin(\pi n) = 0$; $cos(\pi n) = (-1)^n$

$$cos(\frac{\pi}{2} n) = \left(\frac{1 + (-1)^n}{2}\right) (-1)^{\frac{n}{2}} = \begin{cases} 0, & n = 2j+1 \\ (-1)^j, & n = 2j \end{cases}$$

$$sin(\frac{\pi}{2} n) = \left(\frac{1 + (-1)^n}{2}\right) (-1)^{\frac{n+2}{2}} = \begin{cases} 0, & n = 2j \\ (-1)^j, & n = 2j+1 \end{cases}$$

Bsp $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$

2π-periodisch



$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(\frac{n\pi}{L} x) + b_n sin(\frac{n\pi}{L} x)$$

$\rightarrow b_n =$

$\rightarrow$

$a_0 =$

$a_n =$

ZF :

$$\int \mathbf{x\,cos(nx)} = \frac{x}{n} sin(nx) - \frac{1}{n} \int sin(nx) dx$$
$$= \frac{x}{n} sin(nx) + \frac{1}{n^2} cos(nx) = \frac{nx\; sin(nx) + cos(nx)}{n^2}$$

Summen mit Fourier berechnen

→ umformen bis es passt und wähle x_0 entsprechend

Gegeben: $$x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2L}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Gefragt: $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = ?$$

Wähle:

! Anpassen der Summe!

soll $(-1)^k$ geben → Wähle x